

Calcolo combinatorio

Permutazioni biezioni $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ [X ha n elementi]

Le permutazioni di un insieme di n elementi sono $n!$.

Permutazioni con ripetizione = "un modo di ordinare n elementi dove $k_1, k_2, \dots, k_j$ sono uguali (o loro) $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$

In questo caso avremo $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_j!}$ permutazioni con ripetizione.

Targhe

Parole con 4 lettere anche ripetute sulle 26 possibili

AYLS

[Disposizioni con ripetizioni $k=4$ di $n=26$ lettere]



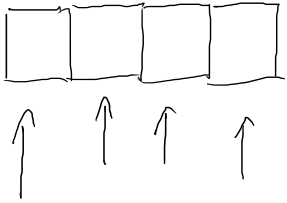
$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4$$

Funzioni $f: \overbrace{\{1, 2, 3, 4\}}^k \rightarrow \overbrace{\{A, B, C, \dots, Z\}}^n$



Senza ripetizioni ?

26 lettere



$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$$

Disposizioni o k o k di un insieme di n elementi: sono $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

120 studenti

4 chromiumi

In quanti modi posso scegliere 4 studenti da una platea di 120?

$$\frac{120 \cdot 119 \cdot 118 \cdot 117}{4!}$$

Si dice combinazione a h o h di n elementi ogni sottoinsieme di h elementi scelti tra gli n (senza tener conto dell'ordine).

Il numero di tutte le combinazioni a h e h di n elementi è

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-h+1)}{h!} =: \binom{n}{h} \quad \text{coefficiente binomiale } n \text{ su } h$$

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$0 \leq k \leq n$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

oss

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\frac{n!}{(n-k)! (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Formule di Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$\uparrow$
 $\uparrow$

✓ n elementi

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$= \{x_1\} \cup \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$$

Un sottoinsieme di k elementi di X può essere di 2 tipi

1) può contenere x_1 $\{x_1\} \cup \{ \dots \}$
 $\uparrow$ $\swarrow \searrow$ $k-1$ elementi

$$\text{ne ho } \binom{n-1}{k-1}$$

2) non contiene x_1 ; ne ho $\binom{n-1}{k}$

$k=0$ $k=1$ $k=2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} n-k \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n-k \\ 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1 T,

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Fibonacci!

Triangolo di Tartagli

Coefficienti binomiali

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{\uparrow} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\uparrow} \cdot \underbrace{(a+b)}_{\uparrow} \cdots \underbrace{(a+b)}_{\uparrow}$$

n fattori

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 a^k b^{n-k}$$

$$a^k b^{n-k}$$

$n=3$

$$(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$\sim a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomio di Newton

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Es:

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} = ?$$

~~$100 \cdot 101$~~ ?

~~100^{100}~~

2^{100}

|||

120 kusurli

3

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ terzet/bu pasxhili}$$

$$\begin{pmatrix} 119 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ terzetli "fawwadi"}$$

$$\frac{1}{120} + \frac{\cancel{119}}{120} \cdot \frac{1}{\cancel{119}} + \frac{\cancel{118}}{120} \cdot \frac{1}{\cancel{118}} \sim \frac{3}{120}$$

$\uparrow \quad \frac{1}{120} \qquad \frac{1}{120}$

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 120 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{119 \cdot 119}{2}$$

$$\frac{120 \cdot \cancel{119} \cdot \cancel{119}}{6}$$

$$= \frac{3}{120}$$

↑

$\mathbb{R}$

La funzione valore assoluto $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

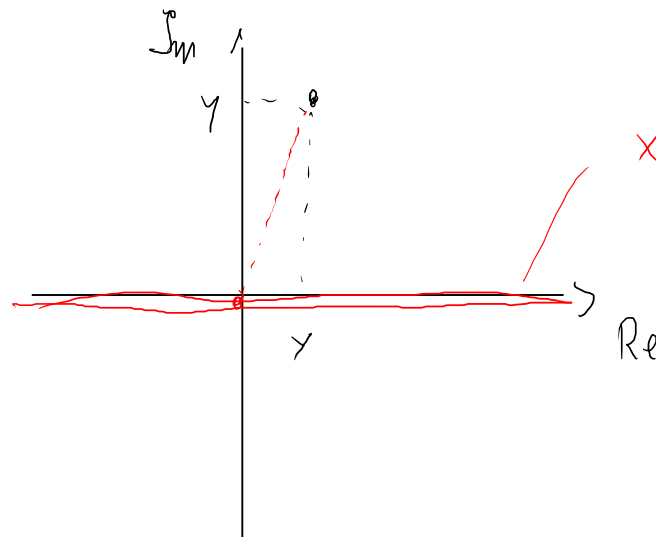
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Numeri complessi $\mathbb{C} = \{ \overbrace{x+iy}^z : x, y \in \mathbb{R} \}$

$$x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$x+iy$ ||
distanza dal
punto 0



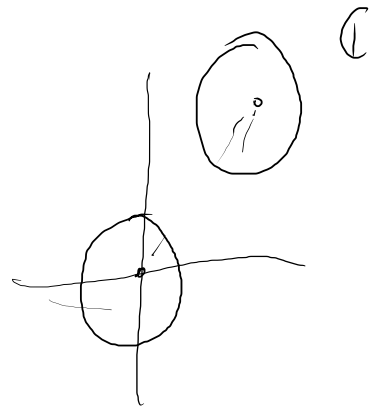
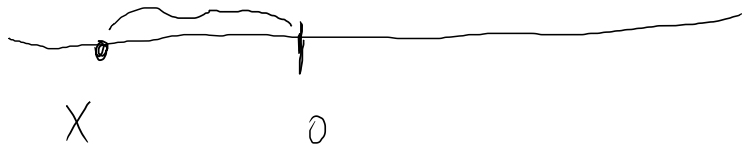
$$x + i \cdot 0 \simeq x$$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = |x|$$

In $\mathbb{R}$ $|x|$ rappresenta la distanza tra il punto x e 0 .



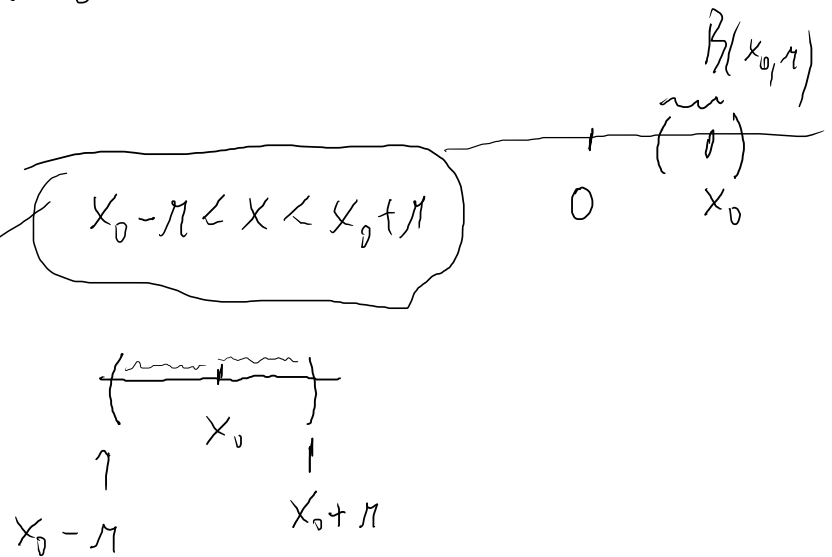
Definiamo palla-aperta di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \in \mathbb{R}^+$

l'insieme dei numeri reali la distanza da x_0 meno di r

$$B(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r \}$$

o

Intervallo simmetrico di x_0 di raggio r .



Proprietà del valore assoluto [distanza]

$$1) |x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|x| = 0 \text{ se e solo se } x = 0$$

$$2) |a \cdot x| = |a| \cdot |x| \quad \forall a, x \in \mathbb{R}$$

$$3) |x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(Disuguaglianza triangolare)

$\mathbb{C}$

$$|z| \geq 0$$

$$|wz| = |w| \cdot |z|$$