$$|x| \geq 0 \qquad |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

$|x| = 0$ se e solo se $x = 0$

$$|ax| = |a| \cdot |x|$$

$$|az| = |(a_1 + i a_2)(z_1 + i z_2)| = |(a_1 z_1 - a_2 z_2) + i(a_2 z_1 + a_1 z_2)|$$

$$= \sqrt{a_1^2 z_1^2 - \cancel{2 a_1 z_1 a_2 z_2} + a_2^2 z_2^2 + a_2^2 z_1^2 + \cancel{2 a_1 z_2 a_2 z_1} + a_1^2 z_2^2} =$$

$$z_1^2 (a_1^2 + a_2^2) + z_2^2 (a_1^2 + a_2^2)$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = |a| \cdot |z|$$

$$\left[\, |\underbrace{x_1+x_2}_{w}| \le \overbrace{|x_1|+|x_2|}^{r} \,\right]$$

$$|w| < r \iff -r < w < r \qquad \begin{cases} -r < w \\ \wedge \\ w < r \end{cases}$$

$$-\left(|x_1|+|x_2|\right) \le x_1+x_2 \le |x_1|+|x_2| \qquad \text{(Da provare)} \quad !$$

dalla definizione di $|x|$ si ha

$$-|x_1| \le x_1 \le |x_1|$$

$$-|x_2| \le x_2 \le |x_2|$$

$$-|x_1| - |x_2| \le x_1 + x_2 \le |x_1| + |x_2|$$

E_1 $\quad \mathbb{C}$ $\quad |z-2i| < 2|z|$

$z = x+iy \qquad |x+iy-2i| < 2|x+iy|$

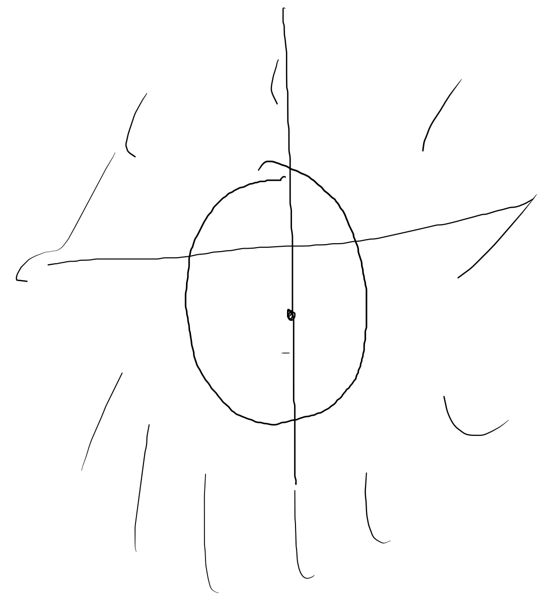
$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} < 2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x^2+y^2-4y+4 < 4x^2+4y^2$$

$$3y^2+4y-4+3x^2 > 0$$

$$y^2+\frac{4}{3}y+x^2 > \frac{4}{3}$$

$$y^2+2\cdot\frac{2}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+x^2 > \frac{4}{3}$$



$$\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+x^2 > \frac{4}{3}+\frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+x^2 > \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\big|\,|3x-1|-2x\,\big| < x$$

$$|3x-1| = \begin{cases} -(3x-1) & \text{se } 3x-1<0 \quad x<\frac{1}{3} \\ 3x-1 & \text{se } 3x-1\geq 0 \quad x\geq\frac{1}{3} \end{cases}$$

1° caso $\boxed{x<\frac{1}{3}}$ $\quad |-3x+1-2x|<x \rightsquigarrow |1-5x|<x$

$$|1-5x| = \begin{cases} -(1-5x) & \text{se } 1-5x<0 \quad x>\frac{1}{5} \\ 1-5x & \text{se } 1-5x\geq 0 \rightsquigarrow 5x\leq 1 \quad x\leq\frac{1}{5} \end{cases}$$

sottocaso I $\quad \frac{1}{5}<x<\frac{1}{3}$

$-1+5x<x$

$4x<1 \quad x<\frac{1}{4} \rightsquigarrow \boxed{\frac{1}{5}<x<\frac{1}{4}}$ OK

sottocaso II $\quad x\leq\frac{1}{5}$ e $x<\frac{1}{3}$ quindi $x\leq\frac{1}{5}$

$1-5x<x \rightsquigarrow 6x>1 \quad x>\frac{1}{6} \rightsquigarrow \boxed{\frac{1}{6}<x\leq\frac{1}{5}}$

2° caso $\quad x\geq\frac{1}{3}$

$|3x-1-2x|<x \rightsquigarrow |x-1|<x$ $\rightsquigarrow$ sottocaso I $\quad x\leq 1$

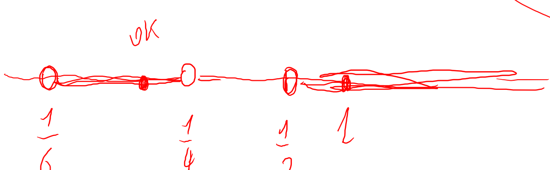
$1-x<x$

$x>\frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\frac{1}{2}<x\leq 1}$

sottocaso II $\quad \boxed{x>1}$

$x-1<x \rightsquigarrow -1<0$ sempre verificato

$$\left]\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

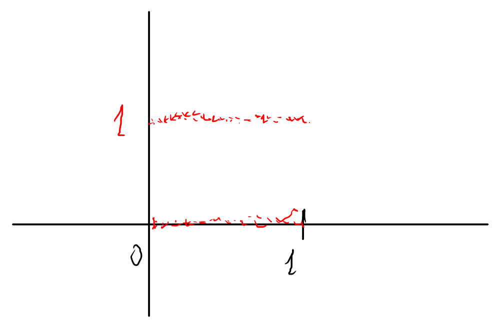


Funzioni reali di variabile reale

$$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \Gamma_f := \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in E \}$$

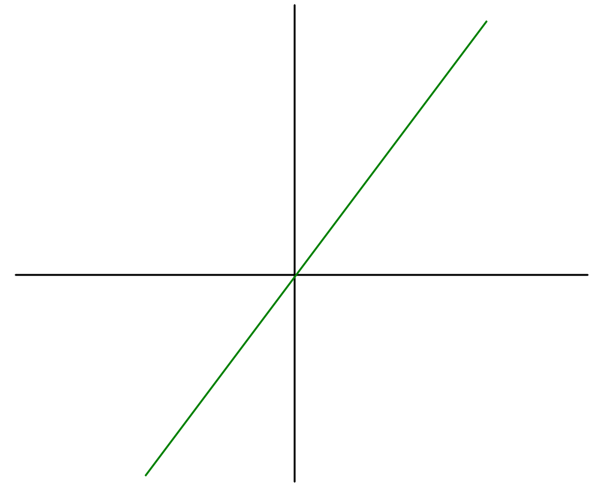
$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x)$$ funzione di Dirichlet

chi



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$ $\quad$ funzione identica



funzioni costanti

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

Algebra delle funzioni $\quad f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f + g : E \to \mathbb{R}$ $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$f \cdot g : E \to \mathbb{R}$

$[f(x)]^n$ $\quad n \in \mathbb{N}^+$ $\quad [f(x)]^1 = f(x)$ $\quad [f(x)]^{n+1} = [f(x)]^n \cdot f(x)$

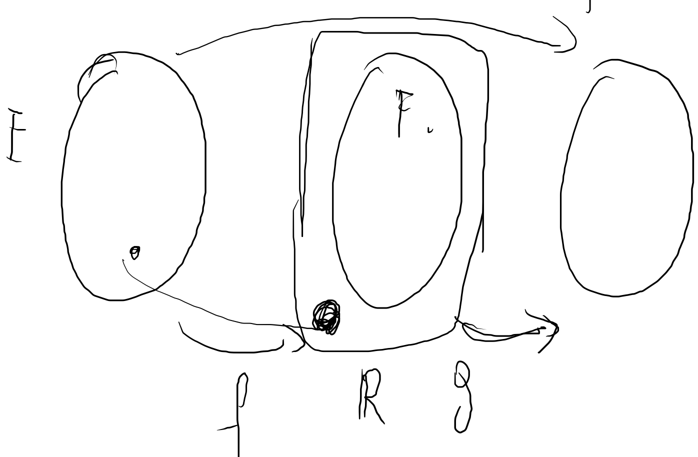
funzioni polinomiali $\quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$f, g : E \to \mathbb{R} \qquad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \frac{f}{g} : \{x \in E : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$

funzioni razionali $\quad \frac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi

— o —

funzioni composte $\quad f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : F \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\boxed{f(E) \subseteq F}$

$f(x) = -x^2$ $\qquad g(x) = \log x$

$(g \circ f)(x) = \log(-x^2)$!!! NON SI PUÒ FARE

$f(\mathbb{R}) =]-\infty, 0]$ $\qquad F = \operatorname{dom} g =]0, +\infty[$ $\qquad f(E) \not\subset F$!!

$f(x) = x^2 - 3x$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = |x|$ $\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

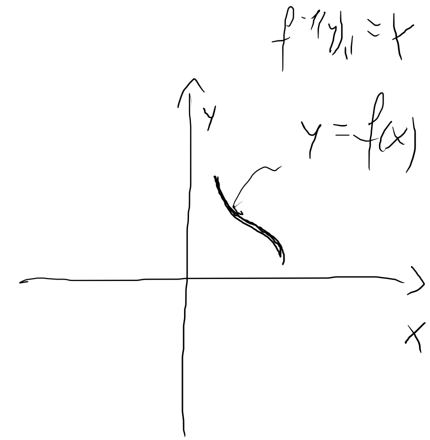
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3x) = |x^2 - 3x|$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 - 3|x|$

$\Big\} \neq$!

$f^n(x)$ scrittura ambigua

$$f^n(x) \; \Big< \; \begin{array}{l} [f(x)]^n \\ \underbrace{(f\circ f\circ \cdots \circ f)}_{n \text{ volte}}(x) \end{array}$$



$f(x) = x^2 - 3x$

$$(f\circ f)(x) = f(x^2-3x) = (x^2-3x)^2 - 3(x^2-3x)$$

funzione inversa $\quad f: E \subseteq \mathbb{R} \to F \subseteq \mathbb{R} \quad$ f biiettiva

$f^{-1}: F \to E \qquad \boxed{f^{-1}(b) = a \text{ se } f(a) = b}$

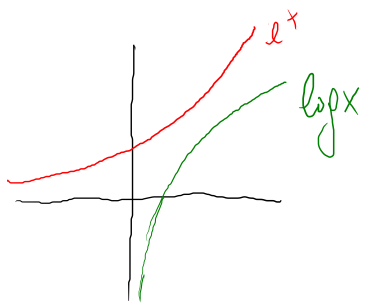
$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in F\} \qquad \Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in E\}$$

OSS $f: E \to F \qquad f^{-1}: F \to E$

⚠ dominio e codominio vengono scambiati tra loro

il grafico di f^{-1} è uguale al grafico di f ma "visto" dalla parte opposta ("girando il foglio"),

se vogliamo trovare il grafico di f^{-1} sullo stesso diagramma su cui abbiamo trovato il grafico di f, osserviamo che i due grafici sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice del I e III quadrante



Es: si determini la funzione inversa di $f: \underline{\mathbb{R} \setminus \{1\}} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$$

$f^{-1}(b) = a$ se e solo se $b = f(a)$

$y = f(x)$

$$y = \frac{3x-1}{x-1}$$

$y(x-1) = 3x-1$

$xy - y = 3x - 1$

$-y = 3x - xy - 1$

$x(3-y) = 1 - y$

$$x = \frac{1-y}{3-y} = \frac{y-1}{y-3}$$

$y \neq 3$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y-3}$$

⚠

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x-3}$$

Proprietà delle funzioni reali di variabile reale $f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia P una proprietà insiemistica su $\mathbb{R}$ [A è limitato, esiste $\max A$, oppure ogni elemento di A è >0 ...]

Si usa dire che "f soddisfa la P" se l'insieme immagine $f(E)$ soddisfa la P

$\boxed{f \text{ è limitata}}$ significa che $f(E)$ è un insieme limitato

esiste $\max f$ " esiste $\max f(E)$

$f > 0$ " $f(x) > 0 \quad \forall x \in E$

$3 = \max f$ significa che esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = 3$ e $\forall x \in E \; f(x) \leq f(x_0) = 3$.

significa che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\forall x \in E \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta$.

equivale a dire che $\boxed{\text{esiste } K \in \mathbb{R} \text{ tale che } |f(x)| \leq K \quad \forall x \in E.}$

OSS

$$\big||x|-|y|\big| \leq \overbrace{|x-y|}^{r} \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{-|x-y| \leq |x|-|y|}\ \underbrace{\leq |x-y|}$$

$$\boxed{|z| < r \iff -r < z < r}$$

$$|x| = |(x-y)+y| \leq \underbrace{|x-y|+|y|}$$

$$|-w| = |w|$$

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x|$$

$$|y|-|x| \leq |y-x|$$

$$-|y-x| \leq |x|-|y|$$

" $-|x-y|$