$\cancel{\infty}$

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$

se A è superiormente illimitato poniamo

inferiormente " "

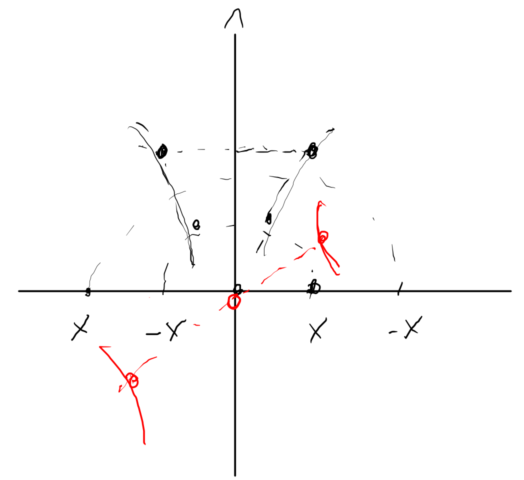
$$\boxed{\begin{array}{l} \sup A = +\infty \\ \inf A = -\infty \end{array}}$$

$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \sup f = \sup\{f(x) : x \in E\}$

— o —

$f : E \subseteq \mathbb{R}$ si dice pari se $\forall x \in E$ si ha $-x \in E$

e $\underline{f(-x) = f(x)}$



$f : E \subseteq \mathbb{R}$ si dice dispari se $\forall x \in E$ si ha $-x \in E$

e $f(-x) = -f(x)$

Es. $f(x) = x^n$ n pari $n = 2k$

$(-x)^{2k} = x^{2k}$

$\|$

$(-x)^{2k} = \left[(-x)^2\right]^k = \left[x^2\right]^k = x^{2k}$

?

$a^{m \cdot n} = \left[a^m\right]^n$? perché ?

$a^1 = a$

$a^{n+1} = a^n \cdot a$

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^+$

Fissiamo $m \in \mathbb{N}^+$; dimostriamo per induzione su n

① Passo base $n = 1$ $\quad a^{m+1} = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1$

② Passo induttivo: supposto vero per n

proviamo che è vero per $n+1$

$= a^m \cdot a^{n+1}$

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} \underset{\text{def.}}{=} a^{m+n} \cdot a \underset{\text{ipotesi induttiva}}{=} a^m \cdot \underbrace{a^n \cdot a}$$

Es.:

funzioni monotòne: crescenti o decrescenti $\nearrow$

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f si dice crescente se $\forall x_1, x_2 \in E$ se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$

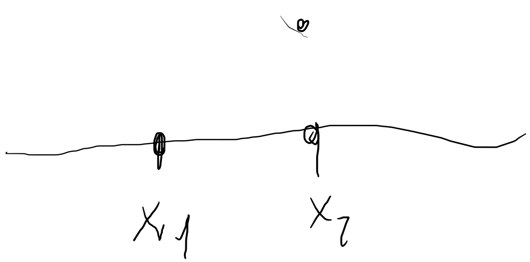
[strettamente cr.] $<$

f si dice decrescente se $\forall x_1, x_2 \in E$ se ~~$x_1 > x_2$~~ allora $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\searrow$

[strettamente decr.]

$x_1 < x_2$

$[\ >\ ]$



funzioni ristretta [restrizione di una funzione]

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia $G \subseteq E$, la funzione $f|_G : G \to \mathbb{R}$ definita da $f|_G(x) = f(x)$ $\forall x \in G$ si dice restrizione di f a G.

$$\underbrace{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2^x}_{f \text{ non è suriettiva}} \qquad \underbrace{g: \mathbb{R} \to]0,+\infty[\quad g(x) = 2^x}_{g \text{ è suriettiva}}$$

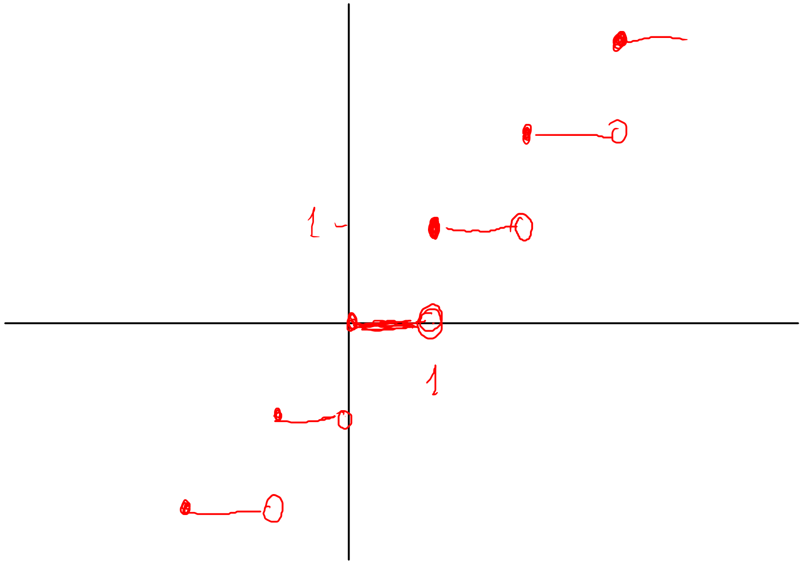
Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ parte intera

$f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : x \geq k\}$

$[3,72] = 3$

$[-3,72] = -4$

$[n] = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$



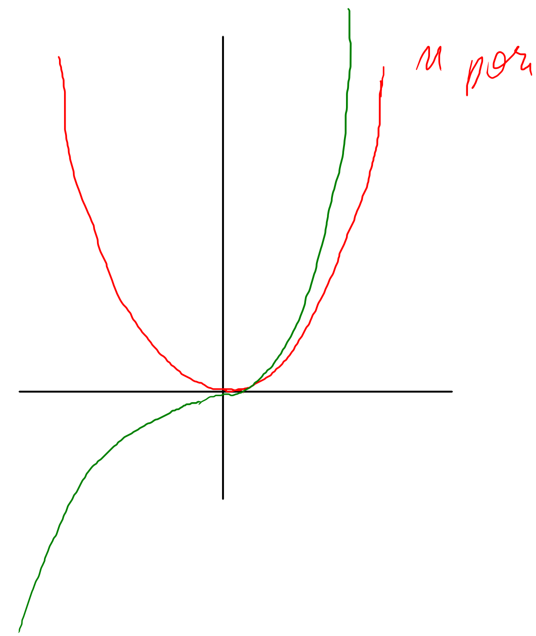
Potenze di esponente naturale $n \in \mathbb{N}^+$ $f(x) = x^n$ $\left[\begin{array}{l} x^1 = x \\ x^{n+1} = x^n \cdot x \end{array}\right]$

Proprietà algebriche

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}^+$ $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$

2) $[x^n]^m = x^{n \cdot m}$

3) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1^n \cdot x_2^n = (x_1 \cdot x_2)^n$



Proprietà analitiche

- n pari $\Rightarrow$ x^n è pari
- n dispari $\Rightarrow$ x^n dispari
- $f = f|_{[0,+\infty[} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ è strettamente crescente $\forall n$

$f:[0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^n$ è str. crescente

se $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n$

Induzione: $n = 1$ vero

vero per $n \longrightarrow$ vero per $n+1$

$$x_1^{n+1} = x_1^n \cdot x_1 < x_2^n \cdot x_1 < x_2^n \cdot x_2 = x_2^{n+1}$$

>0

$x_1 > 0$ $\qquad x_1 < x_2$

$x_1^n < x_2^n$

$n, m \in \mathbb{N}^+$

<u>OSS</u>: Sia $n < m$ e $x > 1$; allora $\boxed{x^n < x^m}$

$$x^m - x^n = \underbrace{x^n}_{>0} \underbrace{\left(x^{m-n} - 1\right)}_{>0} > 0$$

perché $x > 1$ $x^k > 1^k = 1$ $k = m - n \in \mathbb{N}^+$

In particolare se $x > 1$ $x^n > 1$

Teorema $f:[0,+\infty[\ \to [0,+\infty[$ $\quad f(x)=x^n$ è suriettiva.

$\left(\forall b\in\mathbb{R} \quad b\geq 0 \quad \exists\, x\in[0,+\infty[\text{ tale che } \underline{x^n=b}\right)$

Dim $n=3$ $\qquad\qquad (\mathbb{R}^+=]0,+\infty[)$

$f(0)=0$; supponiamo $b>0$

$A=\{x\in\mathbb{R}^+ : x^3<b\}$ $\qquad \cancel{x<\sqrt[3]{b}}$

sia $\alpha=\sup A$ Verifichiamo che $\boxed{\alpha^3=b}$

Supponiamo $\alpha^3<b$

$\alpha = \sup \underbrace{\{ x \in \mathbb{R}^+ : x^3 < b \}}_{A}$ $\qquad$ $\alpha^3 < b$

cerchiamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $\boxed{\left(\alpha + \frac{1}{k}\right)^3 < b}$

[allora $\alpha < \alpha + \frac{1}{k}$ ma $\alpha + \frac{1}{k} \in A$ assurdo]

$$\left(\alpha + \frac{1}{k}\right)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \frac{1}{k} + 3\alpha \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} \overset{?}{<} b$$

$$\frac{1}{k} \underbrace{\left[3\alpha^2 + 3\alpha \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right]}_{\phi_k} \overset{?}{<} b - \alpha^3$$

$\frac{1}{k}\phi_k \le \frac{1}{k}\phi < b - \alpha^3$

osservo che $\phi_k \le \underbrace{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}_{\phi}$ se dimostro che $\boxed{\frac{1}{k}\phi < b - \alpha^3}$

a maggior ragione si ha $\frac{1}{k}\phi_k < b - \alpha^3$

$$\frac{1}{k}\left[3\alpha^2 + 3\alpha + 1 \right] \overset{?}{<} b - \alpha^3$$

Archimede: $\exists k :$ $\frac{1}{k} < \frac{b - \alpha^3}{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}$ > 0

Quindi non può essere $\alpha^3 < b$;

Supponiamo $\alpha^3 > b$.

Cerchiamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\alpha - \frac{1}{k}\right)^3 > b$

[se è vero questo abbiamo che $\alpha - \frac{1}{k} < \alpha$ quindi $\alpha - \frac{1}{k}$ non è un maggiorante di A, quindi esiste $x \in A$ tale che $\alpha - \frac{1}{k} < x$

$\Rightarrow b < \left(\alpha - \frac{1}{k}\right)^3 < x^3 < b$ assurdo]

$$\left(\alpha - \frac{1}{k}\right)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\frac{1}{k} + 3\alpha\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} \overset{?}{>} b$$

$$\alpha^3 - b \overset{?}{>} \frac{1}{k}\left[3\alpha^2 - \cancel{3\alpha\frac{1}{k}} + \frac{1}{k^2}\right] \qquad \frac{1}{k^2} \leq 1$$

$$\Phi_k \leq \Phi = 3\alpha^2 + 1$$

se $\frac{1}{k}(3\alpha^2+1) < \alpha^3 - b$ a maggior ragione si ha $\frac{1}{k}\left[3\alpha^2 - \cancel{3\alpha\frac{1}{k}} + \frac{1}{k^2}\right] < \alpha^3 - b$

per Archimede esiste k tale che $\frac{1}{k} < \frac{\alpha^3 - b}{3\alpha^2+1}$ //

Quindi $\alpha^3 < b$ è impossibile, $\alpha^3 > b$ è impossibile.

Allora $\alpha^3 = b$.

Conseguenze: $\boxed{f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[}$ $f(x) = x^n$ è biiettiva; quindi è invertibile.

n pari: diremo radice n-esima la funzione inversa di f

$$\sqrt[n]{x} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$$

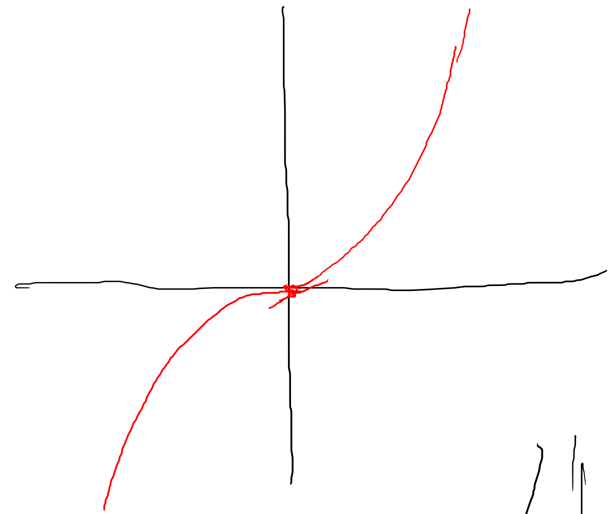
⚠ $\cancel{\sqrt[2]{9} = \pm 3}$

$\sqrt[2]{9} = 3$ l'equazione $x^2 = 9$ ha due soluzioni ± 3.

n pari l'equazione $x^n = b$ con $b > 0$ ha 2 soluzioni

$$x = -\sqrt[n]{b} \quad \text{e} \quad x = \sqrt[n]{b}$$

n dispari $\quad f(-x) = -f(x)$

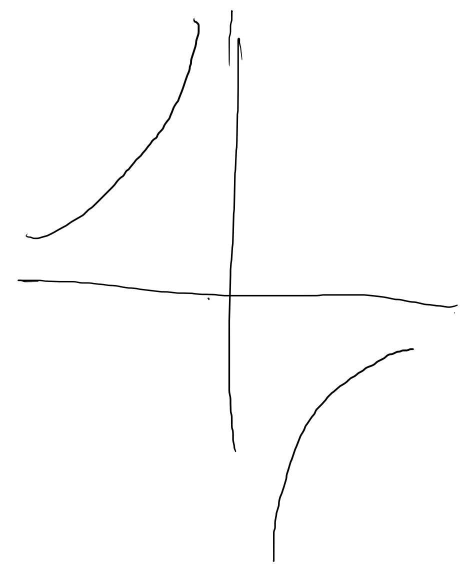


sia $-x_2 < -x_1 < 0 \quad x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

$f(-x_2) = -f(x_2) < -f(x_1)$

$= f(-x_1)$



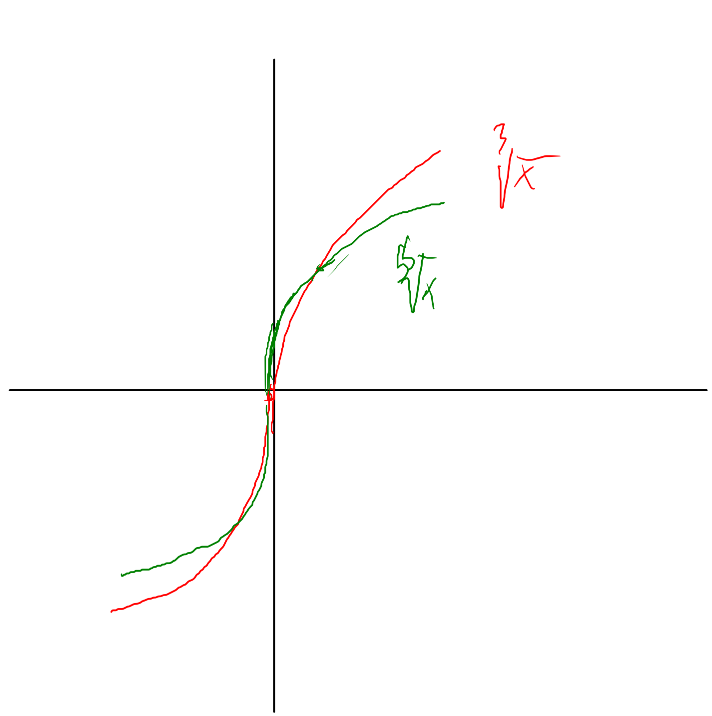
$f|_{]-\infty,0]}$ è crescente $\quad f|_{[0,+\infty[}$ è crescente

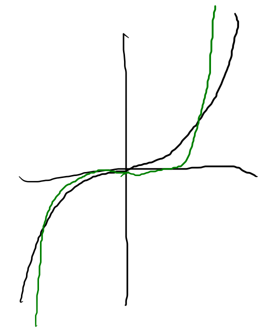
$x_1 < 0 < x_2 \quad f(x_1) < 0 < f(x_2)$ quindi f è crescente su $\mathbb{R}$

$f(x) = x^n$ n dispari è biettiva come funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

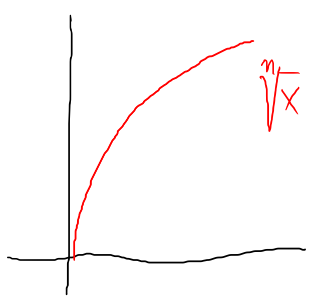
la sua inversa si dice radice n-esima $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$





n pari



Potenze di esponente intero $n \in \mathbb{Z}$

$x \neq 0$ $\qquad n > 0 \qquad -n < 0$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

?

$$\frac{1}{x^n} \cdot x^n = 1 \quad \text{per definizione}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n \cdot x^n = \left(\frac{1}{x} \cdot x\right)^n = 1$$

$x^0 = 1$ $\qquad$ [0^0 non è definito]

Potenze di esponente razionale

$a \in \mathbb{R}$ $\quad a > 0 \quad p \in \mathbb{Q}^+ \quad p = \frac{m}{n}$

$$\frac{m}{n} \tilde{=} \frac{h}{k}$$

$$m \cdot k = n \cdot h$$

voglio $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{h}{k}}$

$$a^p \doteq a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left[\sqrt[n]{a}\right]^m$$

$$\left(\left[\sqrt[n]{a}\right]^m\right)^n = \left[\sqrt[n]{a}\right]^{m \cdot n} = \left(\underbrace{\left[\sqrt[n]{a}\right]^n}_{a}\right)^m = a^m$$

dim.:

$\left[\sqrt[n]{a^m}\right]^n = a^m$ per definizione

$$x^{\frac{1}{3}} \neq \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \left(\sqrt[6]{-27}\right)^2 \quad \text{NO}$$

$]0, +\infty[$

$[$

Se $\quad -\frac{m}{n} < 0 \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

<u>OSS</u>: <u>$a > 1$</u> $\quad p, q \in \mathbb{Q} \quad p < q \Rightarrow a^p < a^q$

$0 < p < q \qquad \frac{m}{n} < \frac{h}{k} \qquad mk < hn$

$a^{mk} < a^{hn} \qquad \sqrt[n]{\cdot}$ crescente

$a^{mk/n} < a^{h} \qquad \sqrt[k]{\ }$ crescente

$a^{\frac{m}{n}} < a^{h/k}$

Potenze di esponente reale $\quad x^{\pi} \quad 3^{\pi}$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R} \quad a > 1$

e^{x}

$$a^{\alpha} = \sup A \qquad A = \{ a^{p} : p \in \mathbb{Q},\ p \le \alpha \}$$

$$= \inf B \qquad B = \{ a^{q} : q \in \mathbb{Q},\ q \ge \alpha \}$$

2^{x}

[sarà l'unico elemento separatore degli insiemi contigui A e B]

Dimostreremo che A e B sono insiemi contigui.

1) sono separati: $\quad a^{p} \le a^{q} \quad \forall\, p \le \alpha,\ q \ge \alpha \quad$ vero

$[p \le q \Rightarrow a^{p} \le a^{q}]$

$a > 1$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ a_\varepsilon \in A, \ b_\varepsilon \in B$ tali che $\quad b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$

Lemma

$a \in \mathbb{R}$ $\underline{a > 1}$, $\varepsilon > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $a^{1/n} < 1 + \varepsilon$

[OSS: $a^0 = 1$] Usiamo la disuguaglianza di Bernoulli

$\underline{(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon}$ prendiamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\varepsilon}{a-1}$

(Archimede)

$n\varepsilon > a - 1 \qquad a < n\varepsilon + 1 \leq (1+\varepsilon)^n \quad \cdot \ \wedge^{1/n}$

$$\boxed{a^{1/n} < 1 + \varepsilon}$$