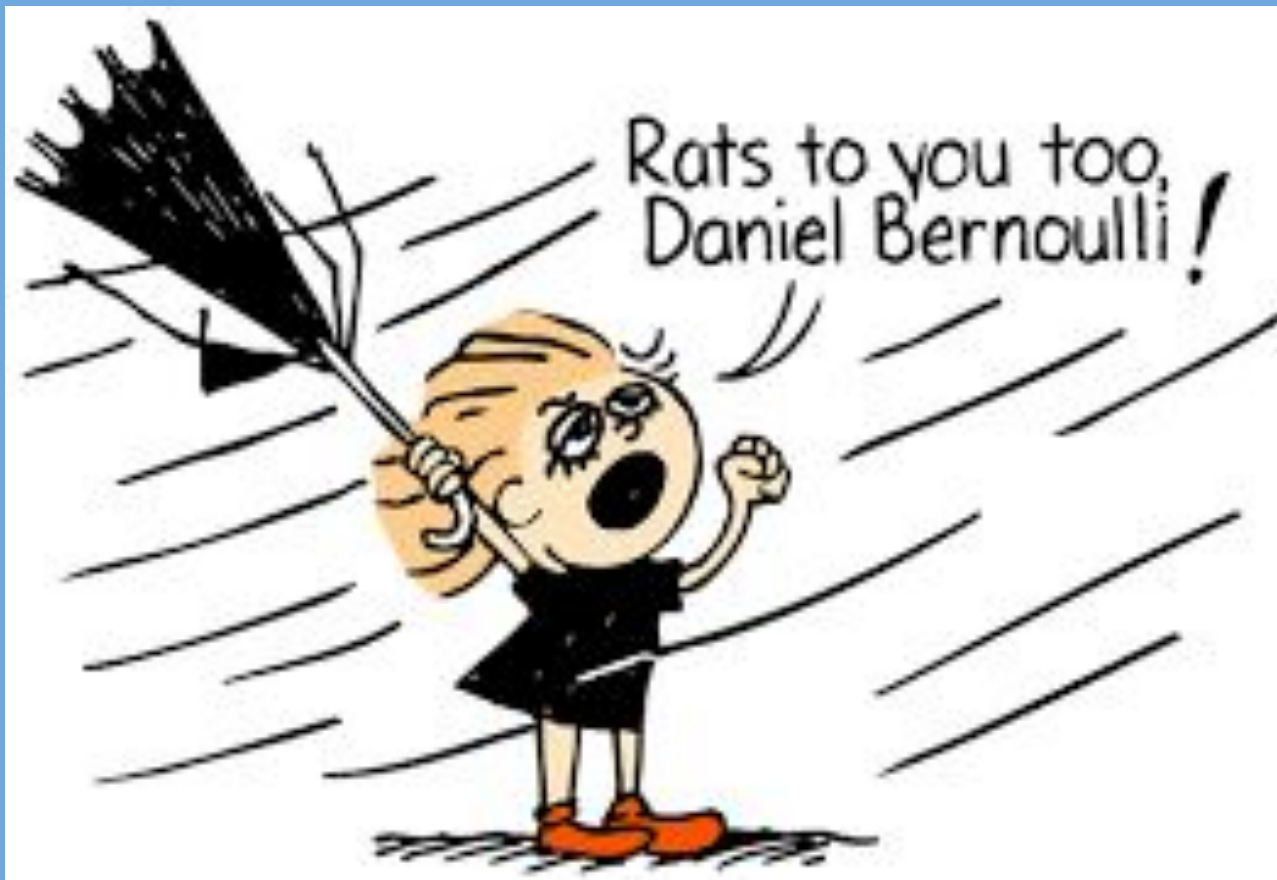


# Physics Education Laboratory Lecture 16 PCK for Fluidodynamics

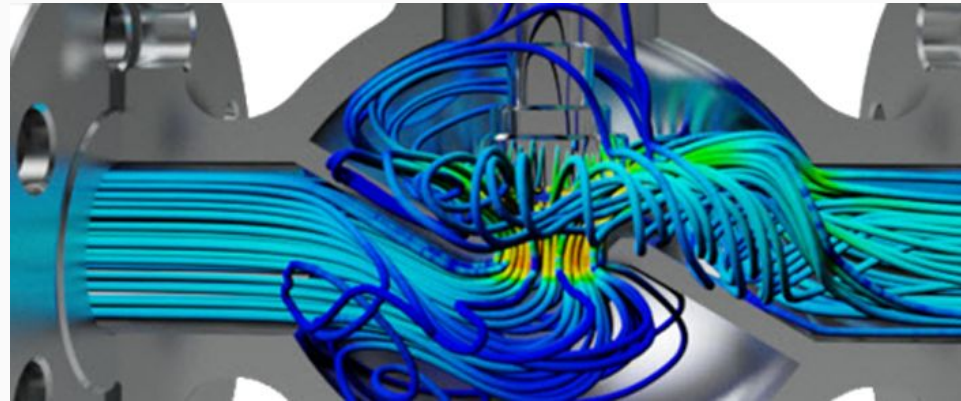
Francesco Longo - 01/12/20





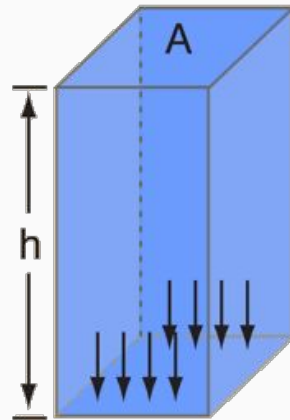
# PCK for Fluidodynamics

- Pressure, Volume, Density
- Archimedes Law
- Stevino Law
- Pascal principle
- Mass / Volume flow rate (“portata”)
- Bernoulli Law
- Viscosity
- Turbolence

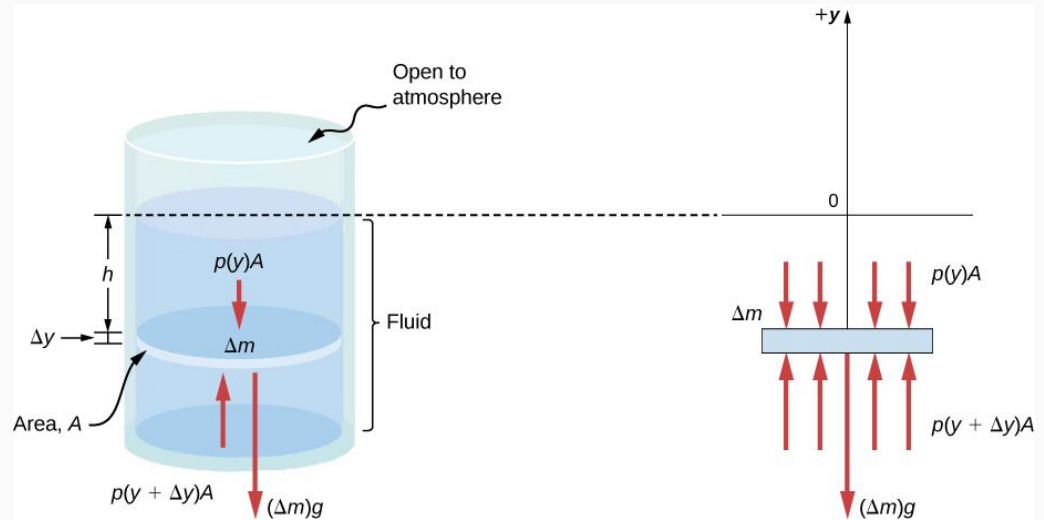


# PCK for Fluidodynamics

- Pressure, Volume, Density
- Stevino Law

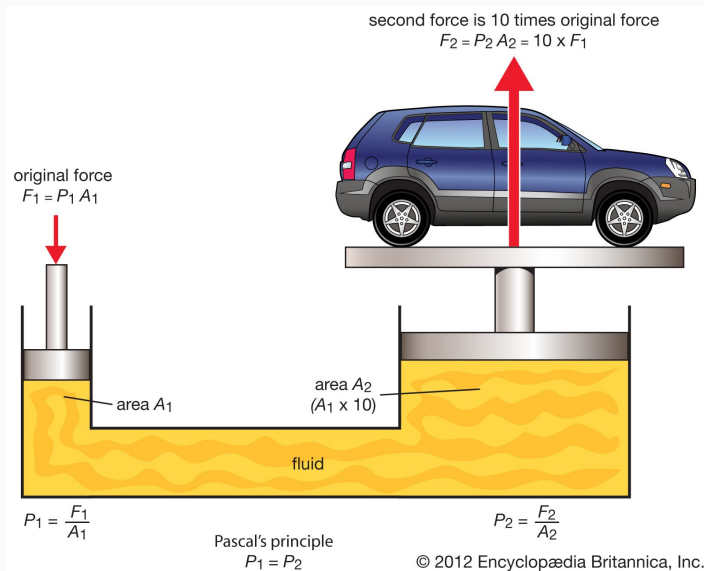


Pressure at depth  $h$ :  
 $P = \rho gh$

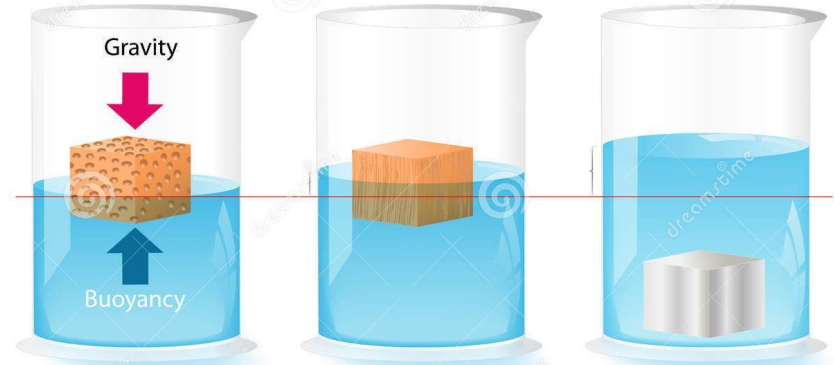


# PCK for Fluidodynamics

- Pascal principle



## ARCHIMEDES PRINCIPLE



Download from  
Dreamtime.com

This watermarked content is for previewing purposes only.

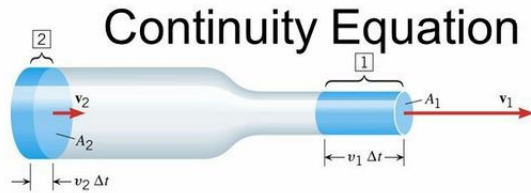


ID 37211092

© Designua | Dreamtime.com

# PCK for Fluidodynamics

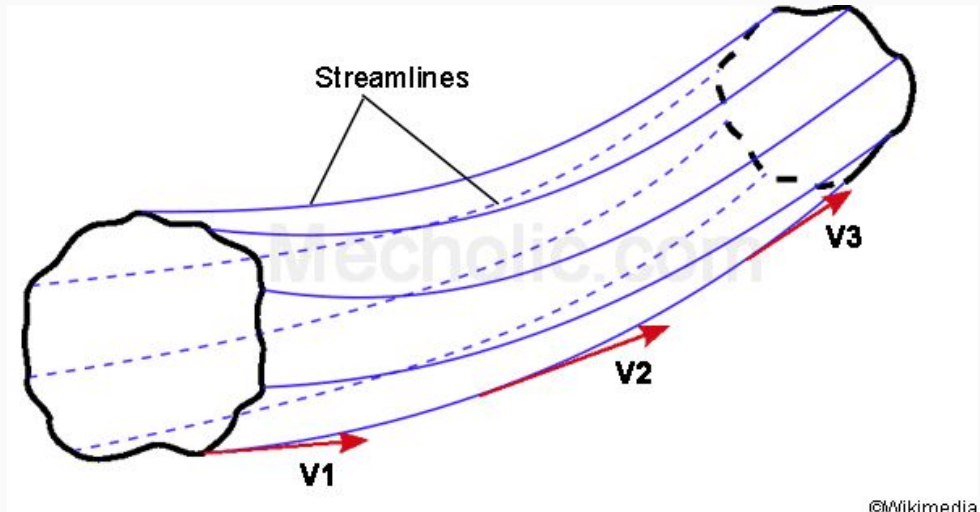
- Mass / Volume flow rate (“portata”)



$$\rho_2 A_2 v_2 = \rho_2 A_1 v_1$$

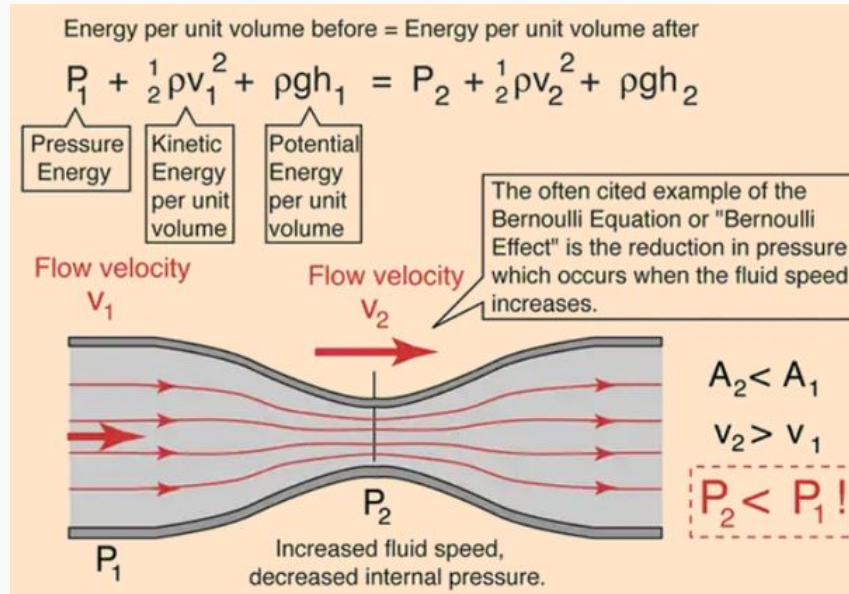
Same, incompressible, fluid so  $\rho$  drops out!

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



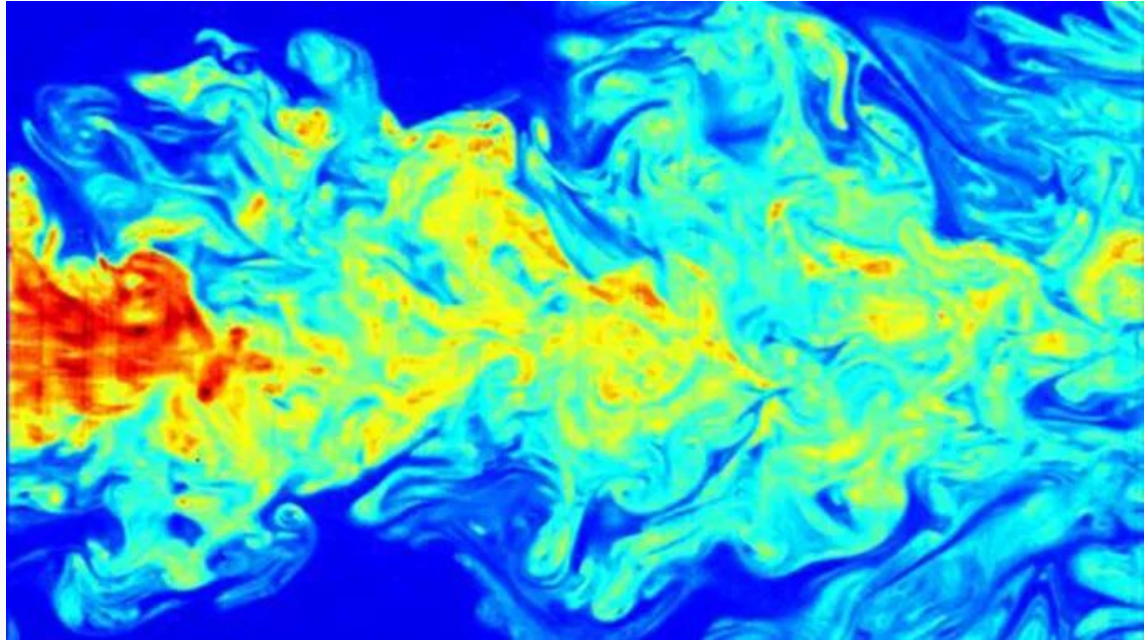
# PCK for Fluidodynamics

- Bernoulli Law



# PCK for Fluidodynamics

- Turbulence







Il miele è un fluido altamente viscoso.



Il tranquillo corso di un fiume è un esempio di moto stazionario di un fluido pressoché ideale: l'acqua. Il moto turbolento è un moto non stazionario, irregolare e caratterizzato dalla presenza di vortici.

## 1. Fluidi reali e fluidi ideali

Nel primo biennio abbiamo definito i *fluidi* come sostanze che possono scorrere da un punto all'altro e che non hanno forma propria e ci siamo limitati a studiare il loro equilibrio.

Per analizzare situazioni reali, come ad esempio una folata di vento o la benzina che esce da una pompa, diventa invece necessario studiare anche il loro movimento.

Sebbene i fluidi siano costituiti microscopicamente da particelle, di cui conosciamo le semplici leggi dinamiche, non sempre – anzi solo in pochi casi – possiamo derivare da queste leggi fondamentali quelle che regolano il comportamento collettivo di un fluido.

La parte della fisica che si occupa dello studio del moto dei fluidi si chiama **fluidodinamica**.

Per affrontare l'argomento, conviene introdurre un modello semplificativo, valido solo approssimativamente: il modello del **fluido ideale**.

Da un punto di vista statico fluidi reali e fluidi ideali si comportano nello stesso modo; la distinzione tra fluidi reali e ideali è importante quindi solo in un contesto dinamico.

Un fluido ideale gode, per definizione, delle seguenti proprietà:

- 1) è *incomprimibile*, cioè il suo volume non varia in seguito a una variazione di pressione;
- 2) è *non viscoso*, cioè le sue parti possono scorrere le une sulle altre senza attrito interno (viscosità).

Come si comportano invece i **fluidi reali**?

Per ciò che riguarda l'incomprimibilità, occorre distinguere tra liquidi e gas: i liquidi reali, infatti, sono con ottima approssimazione incomprimibili, mentre lo stesso non si può evidentemente dire dei gas.

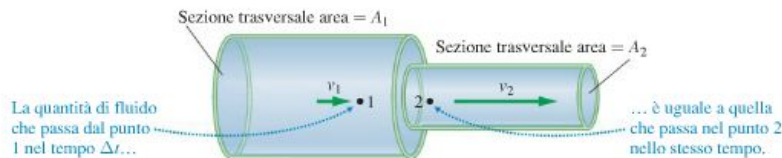
I liquidi reali, inoltre, presentano sempre un certo grado di viscosità; solo quando la viscosità non influisce in maniera determinante sul loro moto essi si avvicinano al modello di fluido ideale. Dobbiamo infine fare un'ulteriore ipotesi semplificativa: supporre che il flusso del fluido sia *stazionario*, cioè che la velocità in ogni punto non vari nel tempo (ma sia in generale diversa da punto a punto). Sotto questa condizione è possibile ricavare alcune importanti relazioni che descrivono il moto di un fluido ideale.

## 2. L'equazione di continuità

✈ Supponiamo di voler innaffiare il giardino; con un tubo senza ugello nebulizzatore l'acqua esce dal tubo piuttosto lentamente; se però mettiamo un dito sull'estremità del tubo, chiudendo l'apertura fino a farla diventare molto piccola, l'acqua viene spruzzata con una velocità più alta e molto più lontano. ✈ Perché ridurre l'apertura del tubo produce questo effetto? Per capire, iniziamo considerando un semplice sistema.

Immaginiamo che un fluido scorra con velocità di modulo  $v_1$  all'interno di un condotto cilindrico la cui sezione ha area  $A_1$ , come nella parte sinistra della figura 1. Se il condotto si restringe a una sezione di area  $A_2$  minore di  $A_1$ , come nella parte destra della figura 1, il fluido scorrerà in questa parte di condotto con una nuova velocità di modulo  $v_2$ .

Possiamo determinare la velocità nella sezione più piccola del condotto supponendo che la quantità di fluido che passa dal punto 1 in un dato tempo  $\Delta t$ , debba anche passare dal punto 2 nello stesso tempo. Se così non fosse, il sistema acquisterebbe o perderebbe una certa quantità di fluido.



Per calcolare la massa di fluido  $\Delta m_1$  che passa dal punto 1 nel tempo  $\Delta t$ , osserviamo che il fluido in questo intervallo di tempo percorre una distanza  $v_1 \Delta t$ ; di conseguenza, il volume del fluido che passa dal punto 1 è:

$$\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$$

Quindi, la massa di fluido di densità  $d_1$  che passa dal punto 1 nel tempo  $\Delta t$  è:

$$\Delta m_1 = d_1 \Delta V_1 = d_1 A_1 v_1 \Delta t$$

Analogamente, la massa di fluido di densità  $d_2$  che passa dal punto 2 nel tempo  $\Delta t$  è:

$$\Delta m_2 = d_2 \Delta V_2 = d_2 A_2 v_2 \Delta t$$

### REAL PHYSICS

Perché per innaffiare il giardino dobbiamo chiudere un po' il tubo con un dito?



figura 1

Flusso di un fluido attraverso un condotto di diametro variabile

Infine, uguagliando le due masse, otteniamo la relazione fra  $v_1$  e  $v_2$ :

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \rightarrow d_1 A_1 v_1 \Delta t = d_2 A_2 v_2 \Delta t$$

Semplificando  $\Delta t$  otteniamo una relazione che prende il nome di **equazione di continuità**:

### Equazione di continuità

$$d_1 A_1 v_1 = d_2 A_2 v_2$$

Molti gas si possono comprimere facilmente e questo significa che la loro densità può variare. La maggior parte dei liquidi, invece, è praticamente incompressibile, perciò la loro densità rimane essenzialmente costante. Salvo diverso avviso, *assumeremo che tutti i liquidi trattati in questo testo siano perfettamente incompressibili*. Perciò, per i liquidi,  $d_1$  e  $d_2$  sono uguali e l'equazione di continuità si riduce alla seguente:

### Equazione di continuità per un fluido incompressibile

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Una importante conseguenza dell'equazione di continuità è che la *velocità di un fluido incompressibile che scorre in un condotto è inversamente proporzionale all'area della sezione attraverso la quale esso fluisce*, cioè è maggiore dove la sezione del condotto è più piccola e minore dove la sezione è più grande.



Equation of  
Continuity



### REAL PHYSICS

Per l'equazione di continuità, riducendo l'apertura del tubo con un ugello o con le dita, si riduce la sezione e si aumenta la velocità di flusso dell'acqua.



## La portata di un fluido

Definiamo la **portata volumica**  $Q$  di un fluido come il volume di fluido che passa attraverso la sezione di area  $A$  in un intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

La variazione di volume  $\Delta V$ , considerando costante la sezione del tubo in un tratto  $\Delta s$ , è  $\Delta V = A\Delta s$ , quindi sostituendo nella definizione di portata si ottiene:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \frac{\Delta s}{\Delta t} = Av$$

Possiamo perciò esprimere la portata nel modo seguente:

### Portata, $Q$

La portata di un fluido che si muove in un condotto di sezione  $A$  con velocità  $v$  è:

$$Q = Av$$

Nel SI la portata si misura in metri cubi al secondo ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).

L'equazione di continuità può quindi anche essere espressa dicendo che *la portata di un fluido lungo un condotto è costante*.

# Continuity equation

## Problem solving 1

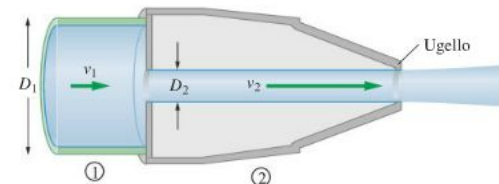


### Manichetta antincendio I

Dell'acqua scorre in una manichetta antincendio di diametro 9,6 cm con una velocità di 1,3 m/s. All'estremità del tubo l'acqua esce attraverso un ugello di diametro 2,5 cm. Qual è la velocità dell'acqua che esce dall'ugello?

#### Descrizione del problema

Nella figura indichiamo il modulo della velocità dell'acqua nella manichetta con  $v_1$  e quello della velocità dell'acqua che esce dall'ugello con  $v_2$ . Sappiamo che  $v_1 = 1,3$  m/s. Conosciamo il diametro della manichetta,  $D_1 = 9,6$  cm e il diametro dell'ugello,  $D_2 = 2,5$  cm.



#### Strategia

Per calcolare la velocità dell'acqua nell'ugello applichiamo l'equazione di continuità  $A_1v_1 = A_2v_2$ . Assumiamo che la manichetta e l'ugello abbiano sezione circolare; quindi la loro area è data da  $A = \pi D^2/4$ , essendo  $D$  il diametro.

#### Soluzione

Dall'equazione di continuità ricaviamo la velocità  $v_2$  dell'acqua nell'ugello:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Utilizziamo l'espressione delle aree  $A = \pi D^2/4$  e sostituiamo i valori numerici:

$$v_2 = v_1 \frac{\pi D_1^2/4}{\pi D_2^2/4} = v_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = (1,3 \text{ m/s}) \left(\frac{9,6 \text{ cm}}{2,5 \text{ cm}}\right)^2 = 19 \text{ m/s}$$

#### Osservazioni

Notiamo che un ugello di piccolo diametro può dare una velocità molto alta; infatti la velocità è inversamente proporzionale al quadrato del diametro dell'ugello.

#### Prova tu

Che diametro deve avere l'ugello perché l'acqua in uscita abbia una velocità di 21 m/s?

[2,4 cm]

### 3. L'equazione di Bernoulli



Daniel Bernoulli  
(1700-1782)

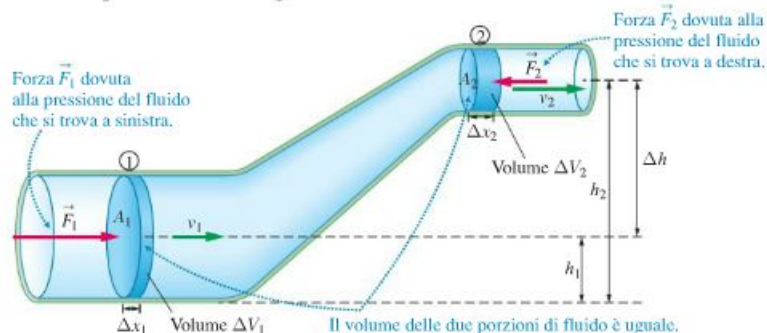
In questo paragrafo applicheremo il teorema della conservazione dell'energia meccanica a un fluido ideale che scorre in un condotto, stabilendo una relazione fra la pressione, la velocità e l'altezza alla quale il fluido si trova. Questa relazione è nota come **equazione di Bernoulli**.

#### Dimostrazione dell'equazione di Bernoulli

Consideriamo un fluido ideale che scorre in un condotto di sezione variabile che si trova a quote diverse, come mostrato in figura 2. Prendiamo in esame una porzione di fluido di volume  $\Delta V$  che viene spinta nella direzione del moto dalla pressione del fluido che si trova alla sua sinistra e che, dopo un certo intervallo di tempo, si troverà all'estremità destra del condotto. Poiché il fluido è incompressibile, assumendo costante la densità, il volume sarà lo stesso nelle due sezioni, quindi:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

Sulla superficie  $A_1$  agisce una forza  $F_1$  nella direzione e nel verso del moto, mentre sulla superficie  $A_2$  agisce una forza, di verso contrario al verso del moto, dovuta alla pressione del fluido che si trova alla destra del volume considerato. Siano  $h_1$ ,  $v_1$  e  $p_1$  rispettivamente l'altezza, la velocità e la pressione del fluido nella regione 1 del condotto e  $h_2$ ,  $v_2$  e  $p_2$  le grandezze corrispondenti nella regione 2.



TUTOR

Disegno attivo

figura 2

Conservazione dell'energia  
per un fluido ideale che  
scorre in un condotto di  
sezione variabile a quote  
diverse

Applichiamo la legge di conservazione dell'energia alla porzione di fluido che passa dallo stato iniziale 1 allo stato finale 2. Per il teorema di conservazione dell'energia meccanica la variazione di energia del sistema deve essere uguale al lavoro  $L_{\text{tot}}$  compiuto sul sistema stesso:

$$L_{\text{tot}} = \Delta U + \Delta K$$

Ma il lavoro totale compiuto sulla porzione di fluido è il lavoro  $L_p$  compiuto dalla pressione in ciascuna regione:  $L_{\text{tot}} = L_p$ . Quindi la legge di conservazione dell'energia si può scrivere:

$$L_p = \Delta U + \Delta K$$

Calcoliamo i tre termini separatamente e poi applichiamo la legge di conservazione.

### 1. Calcolo del lavoro $L_p$ compiuto dalla pressione

Consideriamo la porzione di fluido di lunghezza  $\Delta x_1$  che viene spinta nella direzione del moto dalla pressione  $p_1$ . La forza dovuta alla pressione esercitata sul fluido sulla sezione di area  $A_1$  è  $F_1 = p_1 A_1$  e il lavoro compiuto da questa forza è:

$$L_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1$$

Poiché il volume della porzione di fluido è  $\Delta V_1 = A_1 \Delta x_1$ , il lavoro compiuto da  $p_1$  si può scrivere come:

$$L_1 = p_1 \Delta V_1$$

Quando il fluido arriva nella regione 2 risente di una forza in verso opposto al suo moto, dovuta alla pressione  $p_2$ ; perciò  $p_2$  compie un lavoro *negativo* sulla porzione di fluido. Seguendo il ragionamento precedente, possiamo scrivere il lavoro compiuto da  $p_2$  come:

$$L_2 = -p_2\Delta V_2$$

Il volume della porzione di fluido non cambia nel passaggio dalla regione 1 alla regione 2, quindi possiamo scrivere il lavoro totale sulla porzione di fluido come segue:

$$L_p = L_1 + L_2 = p_1\Delta V_1 - p_2\Delta V_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

## 2. Calcolo della variazione di energia potenziale $\Delta U$

Poiché la porzione di liquido si sposta dall'altezza  $h_1$  all'altezza  $h_2$  e la sua massa è  $\Delta m = d\Delta V$ , la variazione di energia potenziale è data da:

$$\Delta U = \Delta m g(h_2 - h_1) = d\Delta V g(h_2 - h_1)$$

## 3. Calcolo della variazione di energia cinetica $\Delta K$

Esprimiamo ora la variazione di energia cinetica della porzione di fluido di massa  $\Delta m$ , dovuta dalla variazione di velocità nelle due regioni del condotto:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}d\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$



#### 4. Conservazione dell'energia

Sostituiamo, nella legge di conservazione dell'energia  $L_p = \Delta U + \Delta K$ , le espressioni del lavoro, dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$(p_1 - p_2)\Delta V = d\Delta Vg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}d\Delta V(v_2^2 - v_1^2)$$

Dividendo i termini dell'equazione per  $\Delta V$  e separando le grandezze relative alle due regioni otteniamo l'equazione di Bernoulli nella forma:

$$p_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

In generale possiamo esprimere l'equazione come segue:

##### Equazione di Bernoulli

$$p + dgh + \frac{1}{2}dv^2 = \text{costante}$$



Bernoulli's  
Equation

Osserviamo che:

- il termine  $p$  può anche essere espresso come un'energia per unità di volume. Infatti, ricordando che  $p = \frac{F}{A}$ , se moltiplichiamo numeratore e denominatore per lo spostamento  $x$ , otteniamo  $p = \frac{Fx}{Ax}$ ; ma  $Fx$  è il lavoro compiuto dalla forza  $F$  che agisce lungo lo spostamento  $x$  e  $Ax$  è il volume spazzato dall'area  $A$  che percorre lo spostamento  $x$ . Quindi la pressione può essere considerata come lavoro (energia) per unità di volume, cioè  $p = \frac{L}{V}$ ;
- il termine  $dgh$  può essere scritto come  $dgh = \frac{m}{V}gh = \frac{mgh}{V}$  e rappresenta l'energia potenziale gravitazionale per unità di volume;
- il termine  $\frac{1}{2}dv^2$  può essere scritto come  $\frac{1}{2}dv^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{V}v^2 = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{V}$  e rappresenta l'energia cinetica per unità di volume.

# Bernoulli's equation

## ESERCIZIO

1. Verifica che i termini che compaiono nell'equazione di Bernoulli hanno tutti la dimensione di un'energia per unità di volume.

Esprimendo ciascun termine in unità SI e trascurando i coefficienti, otteniamo:

$$p: \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad dgh: \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad dv^2: \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

## Problem solving 2



### La pressione dell'acqua nel bagno

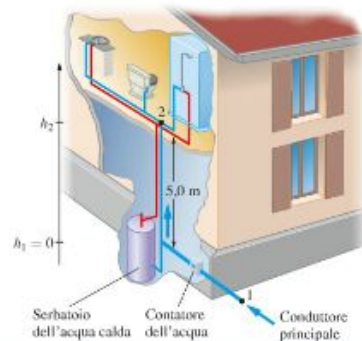
L'acqua entra in una casa attraverso il condotto principale, di diametro interno 2,0 cm, a una pressione di  $4,0 \cdot 10^5$  Pa. Un tubo di diametro 1,0 cm porta l'acqua nel bagno situato al primo piano, a un'altezza di 5,0 m. Se la velocità dell'acqua nella condotta principale è 1,5 m/s, calcola la velocità, la pressione e la portata nel tubo del bagno.

#### Descrizione del problema

Nella figura è riportato lo schema dell'impianto idrico della casa, con la condotta principale e la diramazione verso il bagno al primo piano. Poiché i tubi hanno un diametro relativamente grande si può trascurare l'attrito; inoltre l'acqua è un fluido incompressibile, per cui possiamo usare l'equazione di Bernoulli. Indichiamo con 1 e 2 rispettivamente i punti di ingresso della condotta principale e del bagno. Scegliamo il sistema di riferimento come in figura, in modo che  $h_1 = 0$  e  $h_2 = 5,0$  m.

#### Strategia

Conosciamo  $v_1$  e il diametro dei due tubi, quindi l'area della loro sezione. Utilizzando l'equazione di continuità possiamo calcolare  $v_2$ . Noti  $p_1$ ,  $v_1$  e le altezze, utilizzando l'equazione di Bernoulli possiamo calcolare  $p_2$ .



#### Soluzione

Calcoliamo la velocità  $v_2$  dell'acqua nel tubo del bagno con l'equazione di continuità:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(D_1/2)^2}{\pi(D_2/2)^2} (1,5 \text{ m/s}) = 6,0 \text{ m/s}$$

Dall'equazione di Bernoulli ricaviamo la pressione dell'acqua nel tubo del bagno  $p_2$  e sostituiamo i valori numerici:

$$p_2 = p_1 + dgh_1 - dgh_2 + \frac{1}{2}dv_1^2 - \frac{1}{2}dv_2^2 = p_1 - dg(h_2 - h_1) - \frac{1}{2}d(v_2^2 - v_1^2) = 4,0 \cdot 10^5 \text{ Pa} - (1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)(5,0 \text{ m}) - \frac{1}{2}(1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(36 - 2,25) \text{ m}^2/\text{s}^2 = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Calcoliamo la portata nel tubo del bagno:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_2 v_2 = \pi(0,50 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 (6,0 \text{ m/s}) = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0,47 \text{ litri/s}$$

#### Osservazioni

La pressione e la portata dell'acqua nel tubo del bagno sono sufficienti per alimentare la doccia.

#### Prova tu

Quale dovrebbe essere il diametro del tubo del bagno per avere una portata di 0,40 litri/s alla stessa velocità?

[0,92 cm]

## Caso particolare: altezza costante

Consideriamo il caso particolare di un fluido che scorre in un *condotto orizzontale* di sezione variabile, mostrato in figura 3.

Poiché in questo caso  $h_1 = h_2 = h$ , l'equazione di Bernoulli diventa:

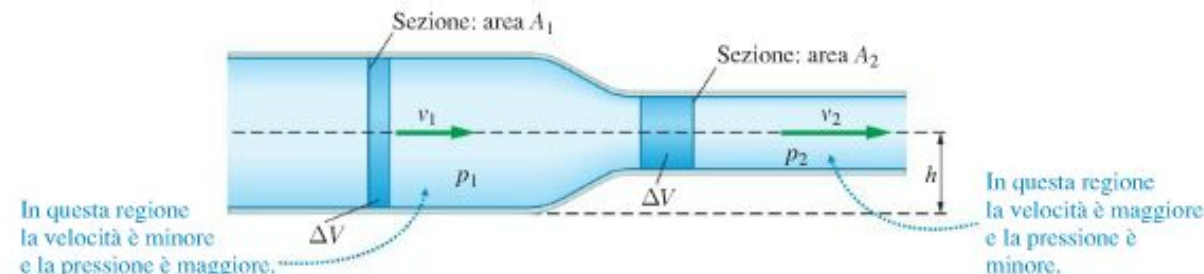
$$p_1 + dgh + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + dgh + \frac{1}{2}dv_2^2$$

e, semplificando i termini contenenti l'altezza, otteniamo:

$$p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 \quad \text{cioè} \quad p + \frac{1}{2}dv^2 = \text{costante}$$

L'equazione precedente equivale a dire che c'è una sorta di bilanciamento fra la pressione in un fluido e la sua velocità: *se la velocità aumenta, la pressione diminuisce*.

Sappiamo che, per l'equazione di continuità, la velocità del fluido è inversamente proporzionale all'area della sezione del condotto, dunque possiamo anche concludere che *la pressione in un condotto orizzontale è maggiore dove l'area della sezione del condotto è maggiore*. Questa affermazione è anche nota come **effetto di Venturi**.



# A

### ATTENZIONE

Sembra poco intuitivo che un fluido che si muove velocemente abbia una pressione minore di uno che si muove più lentamente. Ricordiamo, tuttavia, che la pressione può essere considerata come una forma di energia per unità di volume e che quindi, da questo punto di vista, c'è uno scambio di energia fra pressione ed energia cinetica.

figura 3

**Caso particolare dell'equazione di Bernoulli: fluido che scorre in un condotto orizzontale**

# Important cases

- 1) Constant height
- 2) Constant speed
- 3) Constant pressure

## Problem solving 3

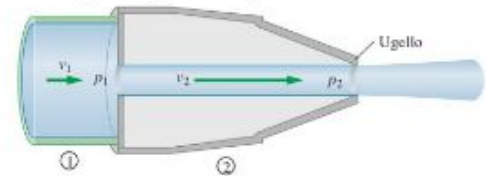


### Manichetta antincendio II

Considera la manichetta antincendio del *Problem solving 1* e supponi che la pressione nella manichetta sia 350 kPa. Calcola la pressione nell'ugello.

Descrizione del problema

Nella figura utilizziamo ancora il sistema di numerazione nel quale l'indice 1 si riferisce al tubo e l'indice 2 all'ugello. Pertanto  $p_1 = 350$  kPa e  $p_2$  deve essere determinata.



Strategia

Nel *Problem solving 1* abbiamo utilizzato l'equazione di continuità  $A_1v_1 = A_2v_2$  per determinare  $v_2$ . Ora utilizzeremo il risultato ottenuto per determinare  $p_2$ , mediante la relazione  $p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$ .

Soluzione

Dall'equazione  $p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$  ricaviamo la pressione  $p_2$  nell'ugello e sostituiamo i valori numerici, ricordando che  $v_1 = 1,3$  m/s e  $v_2 = 19$  m/s sono quelli del *Problem solving 1*:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2) = 350 \text{ kPa} + \frac{1}{2}(1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)[(1,3 \text{ m/s})^2 - (19 \text{ m/s})^2] = 170 \text{ kPa}$$

Osservazioni

La pressione nell'ugello è minore di quella nel tubo. La differenza si deve al fatto che una parte dell'energia immagazzinata sotto forma di pressione nel tubo è stata trasformata in energia cinetica quando l'acqua ha attraversato l'ugello.

Prova tu

Quale deve essere la velocità nell'ugello affinché l'acqua nell'ugello abbia una pressione di 110 kPa? [ $v_2 = 22$  m/s]

## Caso particolare: velocità costante

Consideriamo il caso particolare di un fluido che scorre in un *condotto di sezione costante*, che passa da un'altezza  $h_1$  a un'altezza  $h_2$  come mostrato in figura 4.

Poiché l'area della sezione è costante, per l'equazione di continuità la velocità del fluido non cambia, cioè  $v_1 = v_2 = v$ ; l'equazione di Bernoulli in questo caso diventa:

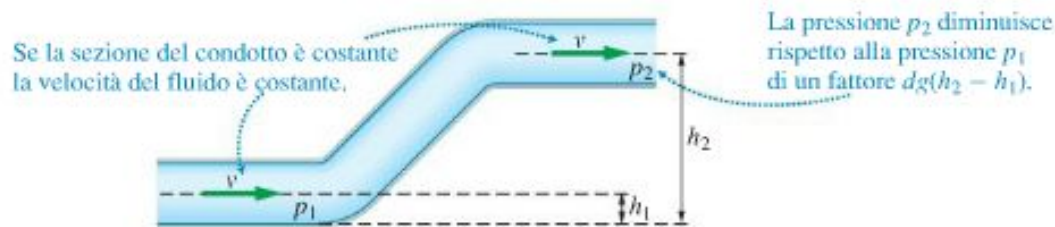
$$p_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv^2 = p_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv^2$$

Semplificando i termini contenenti la velocità otteniamo:

$$p_1 + dgh_1 = p_2 + dgh_2 \quad \text{cioè} \quad p + dgh = \text{costante}$$

Dall'equazione precedente si deduce che *la pressione diminuisce se l'altezza a cui scorre il fluido aumenta*.

Questo risultato è equivalente, nel caso statico, alla **legge di Stevino** che abbiamo ricavato nel biennio partendo da considerazioni sulle forze.



# Important cases

- 1) Constant height
- 2) Constant speed
- 3) Constant pressure

## ESERCIZIO

**2.** In un oleodotto il petrolio (densità  $0,825 \text{ g/cm}^3$ ) scorre a una certa quota a una velocità costante di  $6,8 \text{ m/s}$ , e alla pressione di  $1,72 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Determina la pressione del petrolio in un tratto in cui il tubo dell'oleodotto scorre a una quota più alta di  $125 \text{ cm}$ .

Possiamo determinare la pressione  $p_2$  nel tratto del tubo a una quota maggiore utilizzando l'equazione di Bernoulli a velocità costante:

$$p_1 + dgh_1 = p_2 + dgh_2$$

da cui si ricava  $p_2$ :

$$p_2 = p_1 + dg(h_1 - h_2) = p_1 - dg(h_2 - h_1)$$

Sostituiamo i valori numerici:

$$p_2 = 1,72 \cdot 10^5 \text{ Pa} - (825 \text{ kg/dm}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)1,25 \text{ m} = 1,62 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

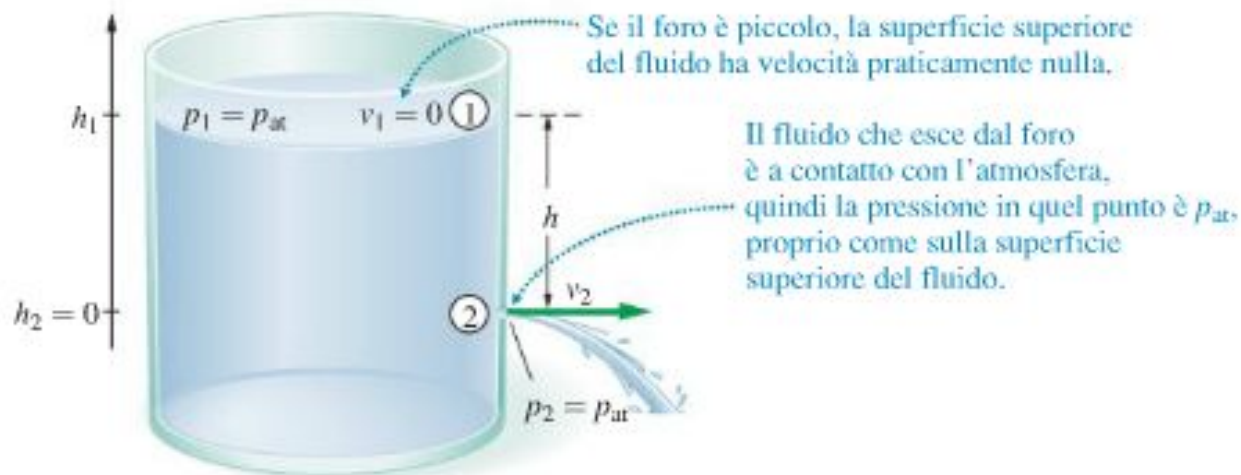
Poiché l'altezza alla quale scorre il petrolio è aumentata, la pressione è diminuita.

Osserviamo che la velocità del petrolio è un dato non necessario alla risoluzione dell'esercizio.

## Caso particolare: pressione costante

Un ultimo caso particolare dell'equazione di Bernoulli si ha quando la pressione è la stessa da una parte e dall'altra del condotto.

In questo caso consideriamo come condotto un recipiente riempito con un fluido, sulla cui superficie laterale è stato praticato un foro, come mostrato in figura 5.



Applichiamo l'equazione di Bernoulli ai punti 1 (sulla superficie superiore del fluido) e 2 (in corrispondenza del foro da cui esce il fluido):

$$p_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

Nel punto 1 il fluido è sottoposto alla pressione atmosferica, dunque  $p_1 = p_{at}$ ; anche nel punto 2 il fluido è sottoposto alla pressione atmosferica perché il foro mette in comunicazione il fluido con l'atmosfera, quindi  $p_2 = p_{at}$ .

Se fissiamo l'origine dell'asse verticale al livello del foro,  $h_2 = 0$ ,  $h_1 = h$  e l'equazione diventa:

$$p_{at} + dgh + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_{at} + 0 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

Se il foro è relativamente piccolo e il recipiente grande, la superficie superiore dell'acqua ha una velocità praticamente nulla; perciò possiamo porre  $v_1 = 0$ , mentre la velocità  $v_2$  è incognita.

Sostituendo nell'equazione precedente otteniamo:

$$p_{at} + dgh + 0 = p_{at} + 0 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

e semplificando:

$$gh = \frac{1}{2}v_2^2$$

Risolviendo rispetto a  $v_2$  otteniamo la relazione:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

chiamata **legge di Torricelli**, che esprime la velocità di efflusso di un fluido da un recipiente riempito fino a un'altezza  $h$ .





### Legge di Torricelli

La velocità di efflusso di un fluido contenuto in un recipiente da un foro posto a un'altezza  $h$  dalla superficie superiore del fluido è:

$$v_{\text{eff}} = \sqrt{2gh}$$

L'espressione trovata per  $v_{\text{eff}}$  è familiare: infatti è la velocità di un corpo in caduta libera da un'altezza  $h$ . In altre parole, *il fluido esce dal foro con la stessa velocità che avrebbe se cadesse da un'altezza uguale alla sua superficie superiore.*

Analogamente, se il getto che esce dal foro fosse diretto verso l'alto, come in figura 6, avrebbe esattamente una velocità tale da far salire il fluido fino a un'altezza  $h$ , cioè fino alla superficie libera del fluido. Questo è proprio ciò che ci aspettiamo sulla base della conservazione dell'energia meccanica.



figu

Alte  
un g  
da u

# Important cases

- 1) Constant height
- 2) Constant speed
- 3) Constant pressure

## Problem solving 4



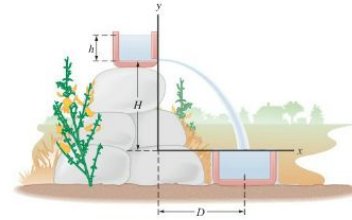
### Il progetto della fontana

Un giardiniere vuole progettare una fontana nella quale uno zampillo d'acqua esca dal fondo di un serbatoio e cada in un secondo serbatoio, come mostrato nella figura. La superficie superiore del secondo serbatoio si trova 0,500 m al di sotto del foro praticato nel primo serbatoio, che è riempito d'acqua per una profondità di 0,150 m.

A quale distanza, a destra del primo serbatoio, deve essere sistemato il secondo serbatoio affinché l'acqua vi cada dentro?

#### Descrizione del problema

La figura riporta le grandezze significative e l'appropriato sistema di coordinate, con l'asse  $x$  orizzontale e l'asse  $y$  verticale. Sappiamo che  $h = 0,150$  m e  $H = 0,500$  m e dobbiamo determinare la distanza  $D$ .



#### Strategia

Questo problema combina la legge di Torricelli con la cinematica. Innanzitutto, determiniamo la velocità  $v$  dell'acqua quando lascia il primo serbatoio. Poi calcoliamo il tempo necessario affinché l'acqua in caduta libera percorra una distanza  $H$ . Infine, poiché il getto d'acqua si muove in direzione  $x$  con velocità costante, calcoliamo la distanza  $D$  come  $D = vt$ .

#### Soluzione

Determiniamo la velocità dell'acqua che esce dal primo serbatoio utilizzando la legge di Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,81 \text{ m/s}^2)(0,150 \text{ m})} = 1,72 \text{ m/s}$$

Calcoliamo il tempo  $t$  di caduta libera per un'altezza  $H$  utilizzando le relazioni del moto uniformemente accelerato:

$$H = \frac{1}{2}gt^2$$

da cui:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(0,500 \text{ m})}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 0,319 \text{ s}$$

Moltiplichiamo  $v$  per  $t$  per ottenere la distanza  $D$ :

$$D = vt = (1,72 \text{ m/s})(0,319 \text{ s}) = 0,549 \text{ m}$$

#### Osservazioni

La soluzione trovata può anche essere scritta come:

$$D = vt = \sqrt{2gh} \left( \sqrt{\frac{2H}{g}} \right) = 2\sqrt{hH}$$

Perciò, se si scambiano i valori di  $h$  e  $H$ , la distanza  $D$  rimane la stessa.

#### Prova tu

Calcola la distanza  $D$  per  $h = 0,500$  m e  $H = 0,150$  m.

[ $D = 0,549$  m, come ci attendevamo]

## 4. Applicazioni dell'equazione di Bernoulli

Consideriamo qualche esempio dalla vita quotidiana che illustra l'applicazione dell'equazione di Bernoulli, verificando la dipendenza della pressione del fluido considerato dalla velocità.

### La portanza su un foglio di carta

Se teniamo un foglio di carta per un estremo, come mostrato in figura 7, e soffiando sulla sua superficie superiore, il foglio si solleva verso l'alto. Per capirne il motivo osserviamo che, quando soffiando, il foglio è pressappoco orizzontale e la velocità dell'aria sopra il foglio è maggiore di quella sotto il foglio.

Se applichiamo l'equazione di Bernoulli nell'ipotesi  $h_1 \simeq h_2$ , con  $p_1, v_1$  e  $p_2, v_2$ , rispettivamente, pressione e velocità sotto il foglio e sopra il foglio, otteniamo:

$$p_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

da cui, se  $v_1 < v_2$ , deduciamo che  $p_1 > p_2$ . Di conseguenza, la pressione sopra il foglio è più bassa di quella sotto il foglio e questa differenza di pressione genera una forza risultante verso l'alto, detta **portanza**, che spinge il foglio e lo solleva.

Se teniamo un foglio di carta per un estremo, esso si piega verso il basso.



Soffiando parallelamente alla superficie superiore, riduciamo la pressione sopra il foglio ( $p_2 < p_1$ ) e ciò comporta una forza risultante verso l'alto che solleva la carta fino quasi alla posizione orizzontale.



**PLUS**

Video

Getto d'aria fra due palle da bowling

[link.pearson.it/30BADFD0](http://link.pearson.it/30BADFD0)



**TUTOR**  
Disegno attivo

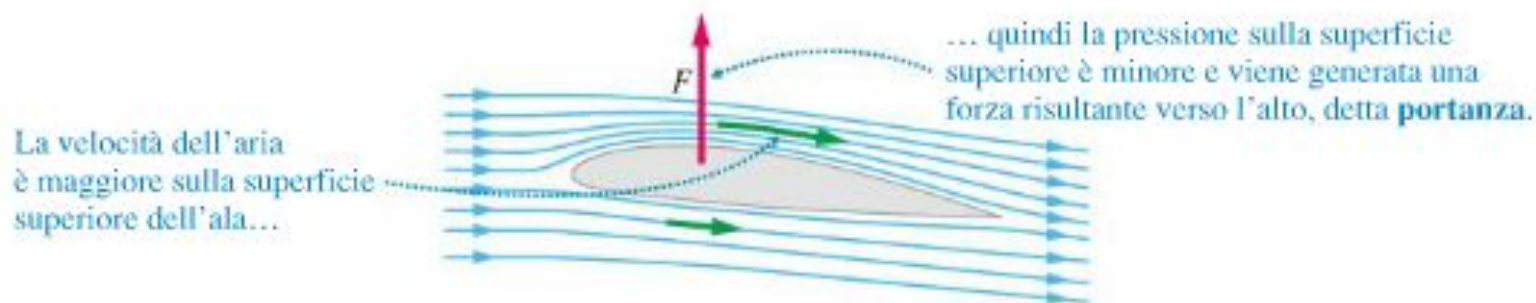
**figura 7**

Foglio di carta e portanza

## La portanza sull'ala di un aereo

Un esempio analogo del legame fra pressione e velocità è fornito dall'ala di un aereo, la cui sezione è mostrata in figura 8. La forma dell'ala di un aereo è progettata in modo che l'aria scorra più rapidamente sulla superficie superiore che non su quella inferiore; di conseguenza, la pressione sopra l'ala è minore di quella sotto l'ala e, come per il foglio di carta, la differenza di pressione determina una forza risultante verso l'alto (portanza) sull'ala.

Osserviamo che la portanza è un effetto dinamico, cioè richiede un flusso d'aria; maggiore è la differenza di velocità, maggiore è la forza verso l'alto.



# Case studies

## ESERCIZIO

**3.** Durante una tempesta, un vento di 35,5 m/s soffia sul tetto di una piccola casa. Determina la differenza di pressione fra l'aria all'interno della casa e l'aria sulla superficie del tetto, assumendo che le finestre e le porte siano chiuse. (La densità dell'aria è 1,29 kg/m<sup>3</sup>).

Utilizziamo l'equazione di Bernoulli, con il punto 1 appena sotto il tetto e il punto 2 appena sopra il tetto e, poiché la differenza fra le altezze dei due punti è piccola, poniamo  $h_1 = h_2 = h$ ; otteniamo:

$$p_1 + 0 + dgh = p_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 + dgh$$

da cui ricaviamo:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}dv_2^2 = \frac{1}{2}(1,29 \text{ kg/m}^3)(35,5 \text{ m/s})^2 = 813 \text{ Pa}$$

## Pericolose differenze di pressione

Spesso diciamo che un tifone o un tornado hanno fatto volare via il tetto di una casa. In realtà la causa non è la grande pressione esercitata dal vento sul tetto, ma proprio l'opposto. Secondo l'equazione di Bernoulli, infatti, l'alta velocità dell'aria che passa sopra il tetto crea una regione di pressione ridotta e la differenza di pressione fra il tetto e la normale pressione atmosferica presente all'interno della casa determina una forza verso l'alto che solleva il tetto, come mostrato nella figura 9.



La differenza di pressione fra l'aria all'interno della casa e l'aria sulla superficie del tetto calcolata nell'esercizio precedente è di 813 Pa e può sembrare piuttosto piccola, considerando che la pressione atmosferica è 101 kPa. Tuttavia, essa può causare una forza rilevante su un'area relativamente grande, come quella di un tetto. Ad esempio, se un tetto ha un'area di circa  $120 \text{ m}^2$ , una differenza di pressione di 813 Pa produce una forza verso l'alto dell'ordine di  $10^5 \text{ N}$  (cioè circa 10 tonnellate peso). È questo il motivo per cui durante le tempeste più violente alcuni tetti vengono divelti dalle case.

## 5. Il moto nei fluidi viscosi

Finora abbiamo considerato soltanto fluidi “ideali”, cioè fluidi che scorrono senza perdite dovute all’attrito interno. In questo paragrafo vedremo che cosa succede quando questa ipotesi non vale più.

Come noto, quando un blocco scivola su un pavimento ruvido risente di una forza di attrito che si oppone al moto. Analogamente, un fluido che scorre su una superficie ferma risente di una forza che si oppone al suo moto. La proprietà di un fluido che indica la resistenza allo scorrimento si chiama **viscosità**.

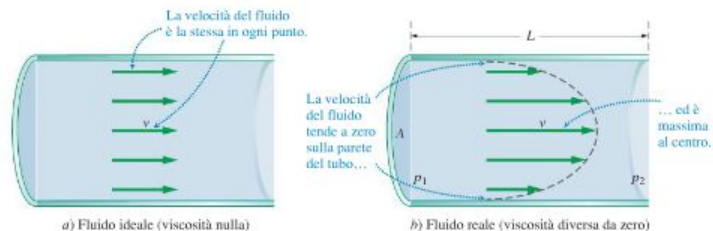
Fluidi come l’aria hanno bassa viscosità, fluidi più densi, come l’acqua, hanno viscosità maggiore e fluidi come il miele o la melassa sono caratterizzati da un’alta viscosità.

## La velocità media di un fluido viscoso

Per approfondire il discorso consideriamo una situazione di grande importanza pratica: lo scorrimento di un fluido in un condotto, ad esempio l'acqua che scorre in un tubo metallico o il sangue che scorre in un'arteria o in una vena. Dobbiamo supporre che il fluido abbia un **moto laminare**, cioè che i suoi strati scorrano l'uno sull'altro con un semplice moto traslatorio *senza formare vortici*.

Se il fluido fosse ideale, cioè avesse viscosità nulla, scorrerebbe nel condotto con velocità uguale in tutti i punti, come mostrato in figura 10a. Un fluido reale con viscosità diversa da zero, scorre invece in modo simile a quello mostrato in figura 10b: il fluido è in quiete vicino alle pareti del tubo e scorre con la sua velocità massima al centro del tubo. Poiché porzioni adiacenti del fluido scorrono le une sulle altre con velocità diverse, per mantenere il flusso si deve esercitare una forza sul fluido, proprio come è necessario esercitare una forza per far scivolare un blocco su una superficie ruvida.

La forza che causa lo scorrimento di un fluido viscoso è fornita dalla *differenza fra le pressioni*,  $p_1 - p_2$ , in una data lunghezza  $L$  del tubo.



Sperimentalmente si può verificare che la differenza di pressione necessaria per mantenere il fluido in movimento è direttamente proporzionale alla lunghezza  $L$  del tubo e alla velocità media  $v$  del fluido ed è inversamente proporzionale all'area  $A$  della sezione del tubo. Tenendo presente tutte queste osservazioni, la differenza di pressione può essere scritta nella forma seguente:

$$p_1 - p_2 = \text{costante} \cdot \frac{vL}{A}$$

La costante di proporzionalità fra la differenza di pressione e  $vL/A$  è legata al **coefficiente di viscosità**,  $\eta$ , del fluido.

La velocità media di un fluido viscoso che scorre in un condotto è:

### Velocità media di un fluido viscoso

$$v = \frac{(p_1 - p_2) A}{8\pi\eta L}$$

La viscosità di un olio lubrificante per motori a 30 °C è circa 0,250 N s/m<sup>2</sup> e diminuisce con l'aumentare della temperatura.



Laminar Flow or Streamline Flow

figura 10

### Velocità di un fluido che scorre in un tubo

In un fluido con viscosità diversa da zero, la velocità media dipende dalla differenza di pressione fra i due estremi del tubo, dalla sua lunghezza  $L$ , dall'area  $A$  della sua sezione e dal coefficiente di viscosità del fluido.



Coefficient of Viscosity



**tabella 1** Viscosità  $\eta$  di alcuni fluidi

Fluido	Viscosità $\eta$ (N s/m <sup>2</sup> )
Miele	10
Glicerina (20 °C)	1,50
Olio per motori (30 °C)	0,250
Sangue (37 °C)	$2,72 \cdot 10^{-3}$
Acqua (0 °C)	$1,79 \cdot 10^{-3}$
Acqua (20 °C)	$1,0055 \cdot 10^{-3}$
Acqua (100 °C)	$2,82 \cdot 10^{-4}$
Aria (20 °C)	$1,82 \cdot 10^{-5}$

Dalla relazione precedente possiamo dedurre che le dimensioni del coefficiente di viscosità sono N s/m<sup>2</sup>. Infatti, poiché:

$$\eta = \frac{(p_1 - p_2) A}{8\pi v L}$$

se esprimiamo le grandezze in unità SI otteniamo:

$$\frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^2}{\text{m/s} \cdot \text{m}} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

Un'unità comunemente utilizzata negli studi sui fluidi viscosi è il **poise**, che prende il nome dal fisiologo francese Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869) ed è definito come:

$$1 \text{ poise} = 0,1 \text{ N s/m}^2$$

Il coefficiente di viscosità dell'acqua a temperatura ambiente è  $1,0055 \cdot 10^{-3}$  N s/m<sup>2</sup> e quello del sangue a 37 °C è  $2,72 \cdot 10^{-3}$  N s/m<sup>2</sup>. Altri valori del coefficiente di viscosità sono riportati in tabella 1.

## Problem solving 5

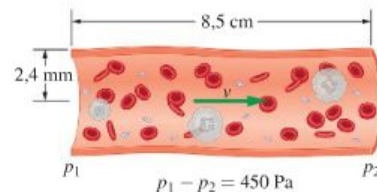


### Velocità del sangue nell'arteria polmonare

L'arteria polmonare, che collega il cuore ai polmoni, è lunga 8,5 cm e ha una differenza di pressione ai suoi estremi di 450 Pa. Se il raggio interno dell'arteria è 2,4 mm, qual è la velocità media del sangue nell'arteria polmonare?

#### Descrizione del problema

La figura mostra una rappresentazione schematica dell'arteria polmonare, non in scala, nella quale sono indicate la lunghezza (8,5 cm) e il raggio (2,4 mm) dell'arteria e la differenza di pressione fra i due estremi (450 Pa).



#### Strategia

Possiamo determinare la velocità media del sangue utilizzando l'equazione  $v = \frac{(p_1 - p_2)A}{8\pi\eta L}$ . Osserviamo che la differenza di pressione,  $p_1 - p_2$ , è nota ed è 450 Pa = 450 N/m<sup>2</sup> e l'area della sezione del vaso sanguigno è  $A = \pi r^2$ .

#### Soluzione

Nell'equazione della velocità media  $v$  sostituiamo l'area  $A$  della sezione con  $\pi r^2$  e semplifichiamo  $\pi$  al numeratore e al denominatore:

$$v = \frac{(p_1 - p_2)A}{8\pi\eta L} = \frac{(p_1 - p_2)r^2}{8\eta L}$$

Sostituiamo i valori numerici:

$$v = \frac{(450 \text{ Pa})(0,0024 \text{ m})^2}{8(0,00272 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2)(0,085 \text{ m})} = 1,4 \text{ m/s}$$

#### Osservazioni

La viscosità del sangue aumenta rapidamente con il valore del suo ematocrito, ovvero, con la concentrazione di globuli rossi nel sangue. Perciò un sangue denso, con valore alto dell'ematocrito, richiede una differenza di pressione significativamente maggiore per una determinata velocità del flusso sanguigno; questa pressione più alta deve essere fornita dal cuore, che lavora in modo più faticoso a ogni battito.

#### Prova tu

Qual è la differenza di pressione necessaria per fornire al sangue di questa arteria polmonare una velocità media di 1,5 m/s?

[480 Pa]

## Equazione di Poiseuille

Possiamo esprimere il **flusso** di un fluido in funzione del volume di fluido  $\Delta V$  che passa per un dato punto in un determinato intervallo di tempo  $\Delta t$ . Abbiamo visto che il volume di fluido che passa attraverso una sezione in un determinato intervallo di tempo è la portata  $Q = vA$ , dove  $v$  è la velocità media del fluido e  $A$  è l'area della sezione del tubo attraverso la quale scorre il fluido.

Moltiplicando l'espressione della velocità media per l'area del tubo, per la portata otteniamo:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = vA = \frac{(p_1 - p_2)A^2}{8\pi\eta L}$$

Poiché, se il tubo è circolare, l'area della sua sezione è  $A = \pi r^2$ , dove  $r$  è il suo raggio, possiamo scrivere il risultato precedente nella seguente forma, nota come **equazione di Poiseuille**:

### Equazione di Poiseuille

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi r^4}{8\eta L}$$

Osserviamo che la portata varia con la quarta potenza del raggio del tubo, perciò una piccola variazione del raggio corrisponde a una grande variazione della portata.

## Legge di Stokes

Un corpo che si muove in un fluido viscoso, risente di una forza di attrito dovuta al fluido. In regime laminare la forza è direttamente proporzionale alla velocità dell'oggetto e diretta nel verso opposto al moto, cioè:

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

La costante  $k$  dipende, oltre che dalla viscosità del fluido, dalla forma del corpo. Ad esempio, consideriamo una sfera di raggio  $r$  in moto con velocità  $v$  in un fluido che ha coefficiente di viscosità  $\eta$ ; se  $v$  non è molto grande, la forza di attrito che agisce sulla sfera è data dalla seguente espressione, nota come **legge di Stokes**:

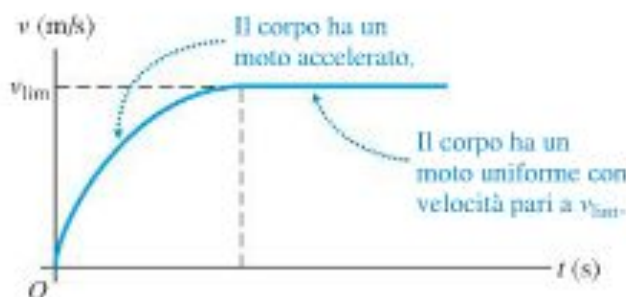
### Legge di Stokes

$$\vec{F}_v = -6\pi\eta r\vec{v}$$

Se  $v$  è elevata, attorno alla sfera si formano dei vortici e la forza non è più data dalla formula di Stokes, ma è approssimativamente proporzionale a  $v^2$ .

## Caduta di un corpo in un fluido viscoso

Un corpo in caduta libera in un fluido viscoso non cade con accelerazione costante perché alla forza peso si oppone la forza di attrito viscoso del fluido, che aumenta man mano che il corpo aumenta la sua velocità, facendo diminuire la forza totale che agisce sul corpo. Dunque la velocità del corpo aumenta fino a raggiungere, quando l'accelerazione diventa uguale a zero, una *velocità limite* che dipende dalla massa e dalla forma del corpo e dal fluido in cui esso cade; da questo istante in poi il corpo ha un moto rettilineo uniforme con velocità pari alla velocità limite. L'andamento della velocità del corpo in funzione del tempo è riportata nel grafico di figura 11.



.....  
**figura 11**

**Andamento della velocità di un corpo in caduta libera in un mezzo viscoso**

Per calcolare la velocità limite è sufficiente uguagliare la forza peso  $P = mg$  alla forza di attrito viscoso  $F_v = kv_{\text{lim}}$ :

$$kv_{\text{lim}} = mg \quad \text{da cui} \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$$

Quindi:

### Velocità limite di un corpo in caduta libera in un fluido viscoso

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$$



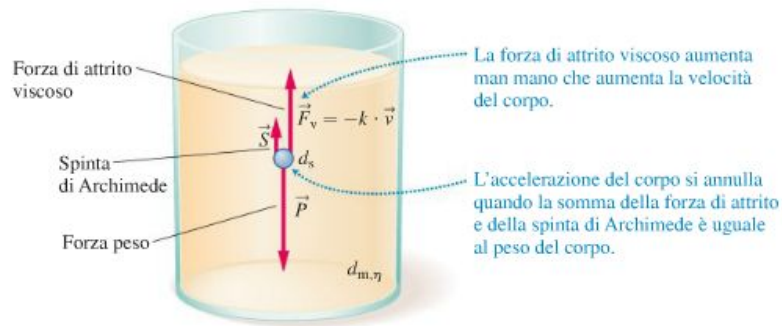
#### REAL PHYSICS

Che velocità limite può raggiungere un paracadutista che si lancia da un aereo?



Un esempio di caduta libera in un fluido viscoso è quello di un paracadutista che si lancia da un aereo e che sfrutta l'attrito viscoso dell'aria per trasformare il moto uniformemente accelerato iniziale in un moto rettilineo uniforme. Se il paracadutista si lancia da un'altezza di circa 3000 m, dopo qualche secondo raggiunge la velocità limite; la sua caduta libera prosegue poi per circa 45 secondi a una velocità limite di circa 50 m/s, pari a 180 km/h. Per ridurre la velocità di impatto con il terreno il paracadutista a questo punto apre il paracadute, in modo da aumentare la forza frenante dell'aria, e decelera; il paracadute gli permette di raggiungere una nuova velocità limite di circa 4-5 m/s e di toccare terra senza subire danni.

In alcuni casi, la velocità limite dipende anche dalla densità del mezzo in cui cade il corpo, perché non è possibile trascurare la forza di Archimede. Consideriamo ad esempio un corpo sferico di raggio  $r$  e densità  $d_s$  che cade da fermo, sotto l'azione della forza di gravità, in un fluido viscoso di densità  $d_m$  e viscosità  $\eta$ , come mostrato in figura 12. Le forze che agiscono sul corpo sono la forza di gravità  $P$ , la forza di Archimede  $S$  e la forza di attrito viscoso, la cui intensità aumenta man mano che aumenta la velocità del corpo.



L'accelerazione del corpo diventa nulla quando la somma delle intensità della forza di attrito e della spinta di Archimede uguaglia il peso del corpo:

$$F_v + S = P$$

Esplicitiamo le espressioni delle intensità delle diverse forze:

$$F_v = 6\pi\eta r v \quad S = V_s d_m g = \frac{4}{3}\pi r^3 d_m g \quad P = V_s d_s g = \frac{4}{3}\pi r^3 d_s g$$

Se sostituiamo le espressioni precedenti nell'equazione  $F_v + S = P$  e poniamo  $v = v_{\text{lim}}$ , otteniamo:

$$6\pi\eta r v_{\text{lim}} + \frac{4}{3}\pi r^3 d_m g = \frac{4}{3}\pi r^3 d_s g$$

cioè:

$$6\pi\eta r v_{\text{lim}} = \frac{4}{3}\pi r^3 g (d_s - d_m)$$

e possiamo calcolare la velocità limite:

$$v_{\text{lim}} = \frac{2r^2(d_s - d_m)g}{9\eta}$$

## Ripassa i CONCETTI CHIAVE

### 1. Fluidi reali e fluidi ideali

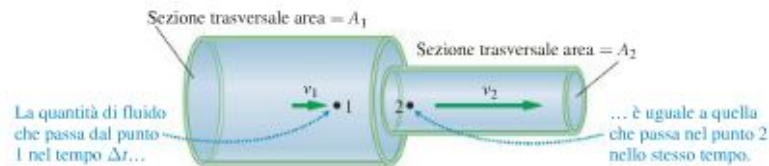
Per studiare il moto di un fluido si introduce un modello: il fluido ideale.

Un **fluido ideale** è un fluido incompressibile e non viscoso.

Per semplificare ulteriormente si suppone che il flusso del fluido sia **stazionario**, cioè che la velocità in ogni punto del fluido non dipenda dal tempo.

### 2. L'equazione di continuità

La velocità  $v$  di un fluido varia se varia la sezione  $A$  del condotto nel quale il fluido scorre.



**Equazione di continuità per i fluidi comprimibili**

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

**Equazione di continuità per i fluidi incompressibili**

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Da questa equazione si deduce che la velocità di un fluido incompressibile che scorre in un condotto è maggiore dove la sezione del condotto è minore.

**Portata**

La portata è il volume di un fluido che passa attraverso la sezione di un condotto nell'unità di tempo:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Av$$

L'equazione di continuità si può anche esprimere dicendo che la portata, cioè la quantità  $Q = Av$ , lungo un condotto è costante.



### 3-4. L'equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli esprime la conservazione dell'energia per unità di volume di un fluido.

La relazione tra pressione, velocità e altezza in due punti di un fluido ideale è:

$$p_1 + dgh_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = p_2 + dgh_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

che si può anche scrivere:

$$p + dgh + \frac{1}{2}dv^2 = \text{costante}$$

#### Effetto Venturi

Se un fluido scorre in un condotto orizzontale (quindi  $h_1 = h_2$ ) a sezione variabile, la pressione è maggiore dove l'area della sezione del condotto è maggiore.

#### Legge di Torricelli

Se viene praticato un foro in un recipiente a una profondità  $h$  sotto la superficie libera dell'acqua, il fluido esce dal foro con la stessa velocità che avrebbe se cadesse da un'altezza uguale a quella della sua superficie superiore, cioè:

$$v_{\text{eff}} = \sqrt{2gh}$$

### 5. Il moto nei fluidi viscosi

#### Viscosità

La viscosità di un fluido è simile all'attrito tra due superfici solide e indica la resistenza di un fluido allo scorrimento.

#### Equazione di Poiseuille

Per mantenere in movimento un fluido a una velocità media costante occorre una differenza di pressione  $p_1 - p_2$ .

La velocità media di un fluido di viscosità  $\eta$  che scorre in un condotto di sezione  $A$  e lunghezza  $L$  è:

$$v = \frac{(p_1 - p_2) A}{8\pi\eta L}$$

La relazione fra la portata  $Q$  del fluido e il suo coefficiente di viscosità  $\eta$  è data dall'equazione di Poiseuille:

$$Q = \frac{(p_1 - p_2)\pi r^4}{8\eta L}$$

che si applica a un tubo di raggio  $r$  e lunghezza  $L$ .

#### Equazione di Stokes

Una sfera di raggio  $r$  che si muove con una velocità  $v$  non molto grande in un fluido il cui coefficiente di viscosità è  $\eta$  è soggetta a una forza di attrito la cui intensità è data dalla legge di Stokes:

$$F_v = -6\pi\eta rv$$

#### Caduta di un corpo in un fluido viscoso

Un corpo in caduta libera in un fluido viscoso non cade con accelerazione costante perché la forza di attrito del fluido si oppone al moto. Poiché la forza di attrito aumenta man mano che cresce la velocità del corpo, quest'ultimo raggiunge una **velocità limite** che dipende dalla sua massa e dalla sua forma:

$$v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$$

