4 ottobre

Funzioni

Dati due insiemi X e Y, una funzione $f: X \longrightarrow Y$ è un criterio che assegna ad ogni $x \in X$ uno ed uno solo elemento di Y che viene denotato con $f(x)$.

- $f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$

- $Q(t)$ ammontare di denaro in un conto corrente al variare del tempo t. Se $Q(0) = Q_0$ e se c'è una rivalutazione continua al tasso annuo del 3%, si ha

$$Q(t) = Q_0 \, e^{t\, 0{,}03}$$

"e" numero di Neper

- funzione costo $C(x)$ è il costo di produrre x unità di un certo prodotto. Ad esempio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

a = costi fissi

bx potrebbe contenere il costo delle materie prime.

Il costo del lavoro può essere una funzione non lineare.

$\log_7 \left(\sqrt{1+x} - 1\right)$ Dominio?

Qui $\sqrt{1+x}$ è definito per $1+x \geq 0 \iff x \geq -1$

Abbiamo anche bisogno

$$\sqrt{1+x} - 1 > 0 \qquad \sqrt{1+x} > 1$$

$$\iff 1+x > 1 \iff \boxed{x > 0}$$ ← dominio

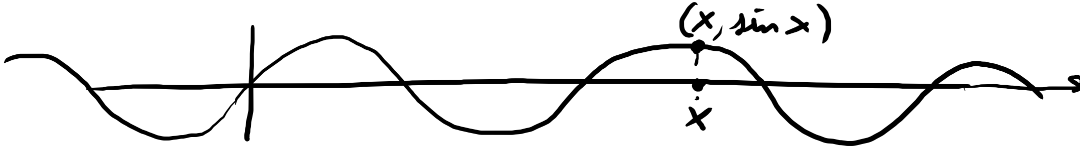
Grafico di una funzione. Sia $f : X \to Y$

Consideriamo $X \times Y = \{ (x,y) : x \in X \text{ e } y \in Y \}$

Il grafico di f

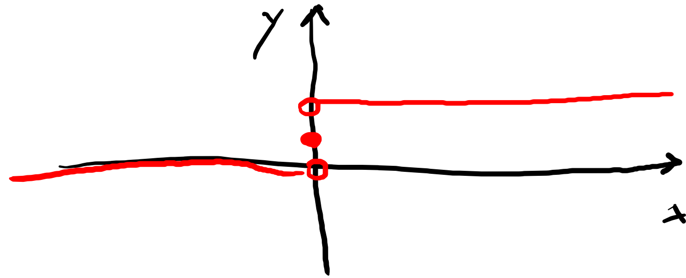
$$G_f = \{ (x,y) \in X \times Y : y = f(x) \}$$
$$= \{ (x, f(x)) \in X \times Y : x \in X \}$$

$\sin x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

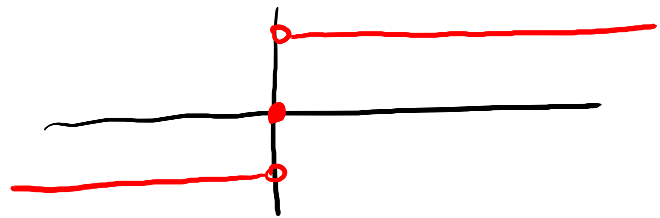


$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Heaviside



$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Esercizio: esprimere $H(x)$ in termini di $\text{sign}(x)$ e viceversa esprimere $\text{sign}(x)$ in termini di $H(x)$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $X = -X$ cioè $x \in X \Longleftrightarrow -x \in X$. Una $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice pari se $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in X$.

Esempio $x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari $x^2 = (-x)^2$

$x^{2n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari

Se invece $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in X$ la funzione è dispari

$x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari $(-x)^3 = -x^3$

- $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

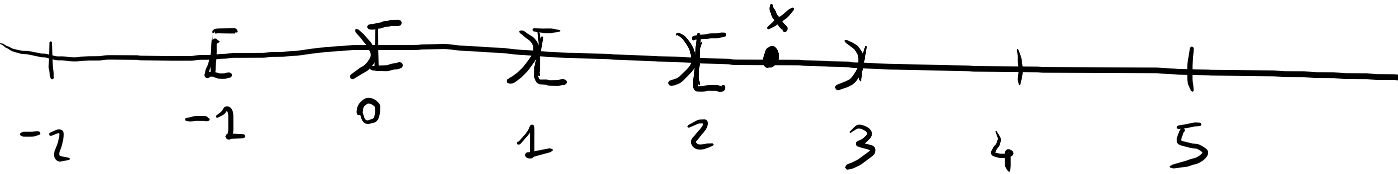
Dirichlet

~~E' pari~~ $\cancel{x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow D(x) = D(-x)}$

Abbiamo $D(x) = D(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ D e' pari

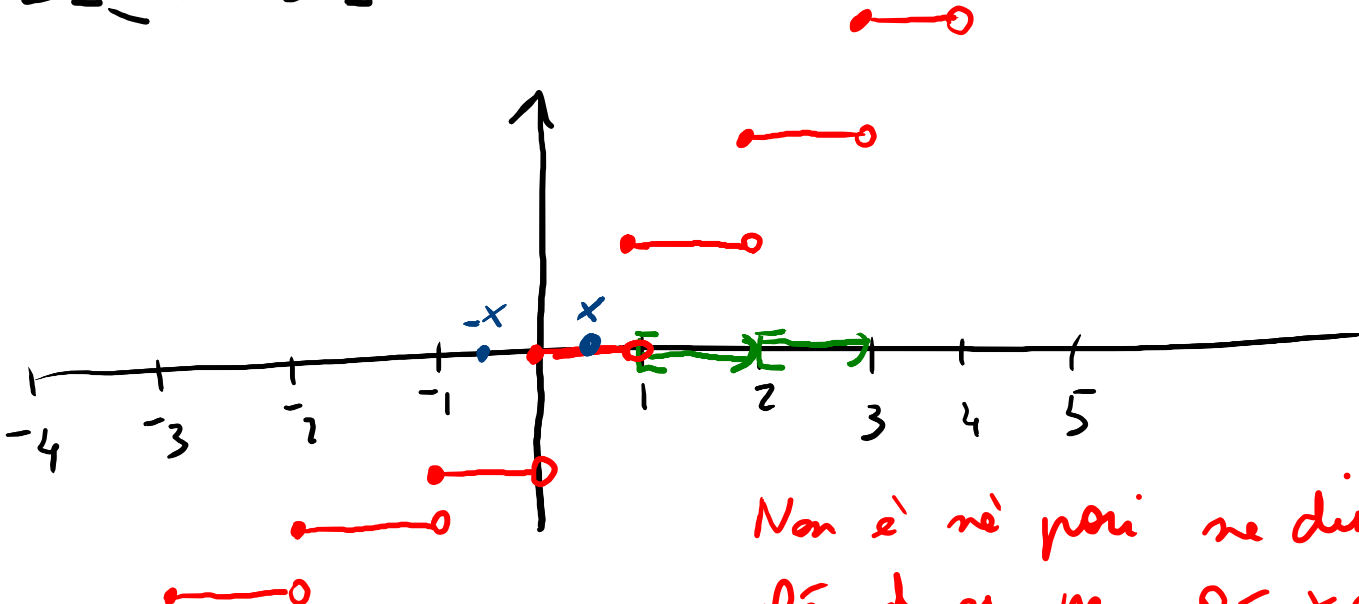
$[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ t.c. $[x] \leq x < [x] + 1$



$[x] = 2$

$[x] \leq x < [x]+1$

$-2 < -1{,}5 < -1$



$[n] = n$

Non è nè pari nè dispari perché ad es per $0 < x < 1$

$D(x) = 0$ e $D(-x) = -1$

Esercizio $\boxed{\inf X = -\sup(-X)}$

$-X = \{-x : x \in X\}$

$\sup(-X) \geq -x \quad \forall\, x \in X \iff -\sup(-X) \leq x \quad \forall x \in X$

Per la 2° prop dell'inf ho che $-\sup(-X) \leq \inf X$

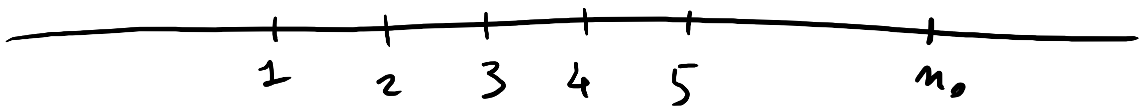
$\inf(X) \leq x \quad \forall\, x \in X \iff -\inf(X) \geq -x \quad \forall x \in X$

$\iff -\inf(X) \geq -x \quad \forall -x \in -X$. Per la 2° prop del sup ho $-\inf(X) \geq \sup(-X) \iff \inf X \leq -\sup(-X)$

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ $X \neq \emptyset$. $\exists \min X$

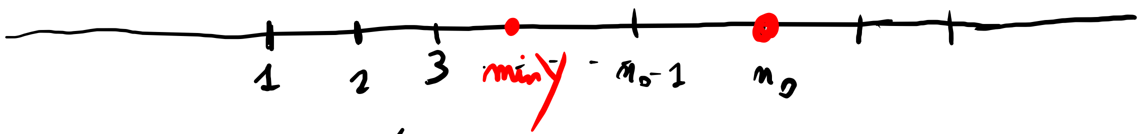
Partiamo dando per scontato che ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ha minimo.

Sia $n_0 \in X$ e sia $Y = \{ n \in X \,;\, n \leq n_0 \}$



$\min Y$ esiste $\qquad Y \subseteq \{1, 2, \dots, n_0\}$

Verifichiamo che $\min X = \min Y$.



Infatti, se $x \in Y$ ho $x \geq \min Y$ (in particolare $n_0 \geq \min Y$)

Se invece $x \in X \setminus Y$ $x > n_0 \geq \min Y$

Esercizio $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dobbiamo dimostrare che $\forall$ $a<b$ $\exists$ un $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c. $a < r < b$.

Consideriamo $\sqrt{2} + a < \sqrt{2} + b$ e sia $q \in \mathbb{Q}$ t.c. $\sqrt{2} + a < q < \sqrt{2} + b \iff a < q - \sqrt{2} < b$

$q - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sia $f : X \longrightarrow Y$ e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme

Allora $f(A) = \{ f(x) : x \in A \} \subseteq Y$

è l'immagine di A.

Sia $B \subseteq Y$ un sottoinsieme

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \} \subseteq X$$

è la controimmagine di B

Sia $f : X \to Y$ e sia $A \subseteq X$ allora

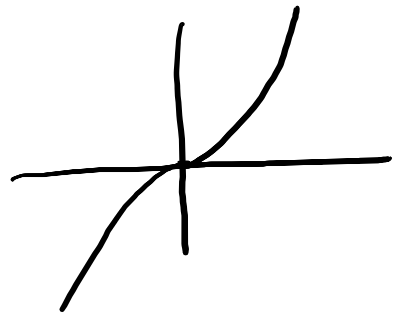
resta definita $f|_A : A \to Y$

$$f|_A(a) = f(a) \qquad \forall a \in A.$$

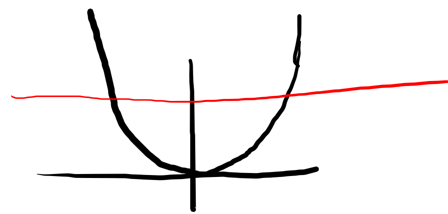
Def $f : X \to Y$ si dice iniettiva se

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Esempio $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e' iniettiva

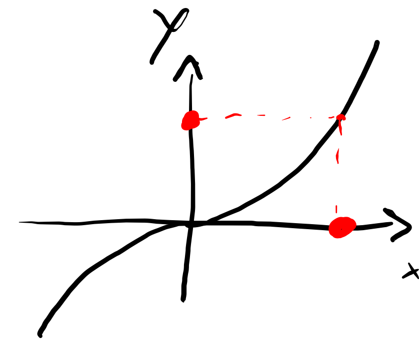


$f(x) = x^2$ non e' iniettiva



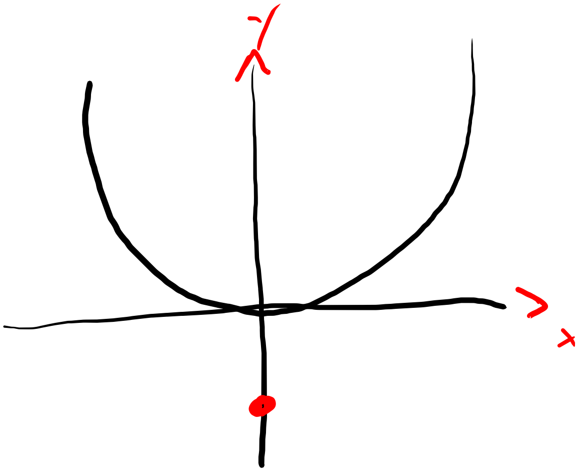
$f: X \to Y$ è suriettiva se $\forall\, y \in Y$ $\exists\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$

<u>Es</u> $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è suriettiva



$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva perché

$\forall\, y < 0$ non esiste $x \in \mathbb{R}$ t.c. $y = x^2$



Una

$f: X \to Y$ che è sia iniettiva che suriettiva è detta biettiva.