Potenze di esponente reale

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}$ $\quad a > 1$ $\qquad A = \{ a^p : p \in \mathbb{Q},\ p \le \alpha \}$ $\qquad B = \{ a^q : q \in \mathbb{Q},\ q \ge \alpha \}$

(*) A e B sono contigui.

Lemma ("continuità dell'esponenziale in zero") $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$;
$\forall\, \sigma > 0 \ \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $a^{1/n} < 1 + \sigma$

Dimostrazione di (*)

$\forall\, \varepsilon > 0$ esistono $a^q \in B$ e $a^p \in A$ tali che $a^q - a^p < \varepsilon$

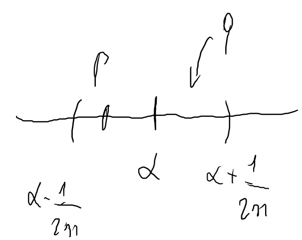
$a^p(a^{q-p} - 1) \overset{?}{<} \varepsilon$ $\qquad$ proviamo $a^k(a^{q-p} - 1) < \varepsilon$

$\Uparrow$ sia $k \in \mathbb{Q}^+$ tale che $k > \alpha$ $\quad [\, p < k$ e quindi $a^p < a^k \,]$

se vale $a^k(a^{q-p} - 1) < \varepsilon$ a maggior ragione vale $a^p(a^{q-p} - 1) < \varepsilon$

$a^{q-p} \overset{?}{<} 1 + \dfrac{\varepsilon}{a^k}$ $\qquad$ sia n tale che $a^{1/n} < 1 + \dfrac{\varepsilon}{a^k}$ $\quad$ [lemma]

Prendiamo allora $p, q \in \mathbb{Q}^+$ $\quad p < \alpha$ e $q > \alpha$ tali che $q - p < \frac{1}{n}$



$a > 1$

$0 < a < 1$

$$a^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\alpha}} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}}}$$

$\frac{1}{a} > 1$

OSS: $a^\alpha = \sup A = \inf B$

se $p < \alpha$ $p \in \mathbb{Q}$, esiste $p_2 \in \mathbb{Q}$ $p < p_2 < \alpha$ quindi $a^p < a^{p_2} \leq a^\alpha$

Quindi $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $x_1 < x_2$ si ha $a^{x_1} < a^{x_2}$.

$\alpha_1 < \alpha_2$

$\uparrow$

$p_1 < p_2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$$

$f(x) = 2^x$ positivo crescente

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ è positivo e decrescente

$x_1 < x_2$ $0 < f(x_1) < f(x_2)$

$$1 < \frac{f(x_2)}{f(x_1)}$$

$$\frac{1}{f(x_2)} < \frac{1}{f(x_1)}$$

Teorema Sia $a>1$; la funzione esponenziale $f: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$

$f(x) = a^x$ è suriettiva.

Cioè $\forall\, b \in \mathbb{R}$ $b>0$, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $a^\alpha = b$.

Dim Sia $A = \{ x \in \mathbb{R} : a^x < b \}$

poniamo $\alpha = \sup A$. Proviamo $a^\alpha = b$.

Supponiamo $a^\alpha > b$ allora $a^\alpha b^{-1} > 1$ per il Lemma esiste $n \in \mathbb{N}$

tale che $a^{1/n} < a^\alpha b^{-1}$ $\left[\sigma > 0 \ \exists\, n : a^{1/n} < 1+\sigma \right]$

$\cdot\, a^{-\frac{1}{n}}$

$$a^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} < a^{\alpha-\frac{1}{n}} b^{-1} \qquad \boxed{a^{\alpha-\frac{1}{n}} > b}$$

$$a^{-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = 1$$

impossibile perché $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$ e α è il minimo maggiorante di A

[Si vede che $\alpha - \frac{1}{n}$ è un maggiorante di A; se così non fosse esisterebbe $x \in A$

tale che $x > \alpha - \frac{1}{n}$ ma $b > a^x > a^{\alpha-\frac{1}{n}} > b$]

Supponiamo $a^\alpha < b$ $\quad b a^{-\alpha} > 1$ Per il lemma esiste $n \in \mathbb{N}$ tale

che $a^{\frac{1}{n}} < b a^{-\alpha}$ cioè $\boxed{a^{\alpha + \frac{1}{n}} < b}$

$\Downarrow$

$\alpha + \frac{1}{n} \in A$ impossibile perché $\alpha \geq x$ $\forall x \in A$.

quindi $a^\alpha = b$.

Oss: $\alpha = \sup\{x \in \mathbb{R} : a^x < b\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : a^x > b\}$

—∘

quindi a^x è biiettiva tra $\mathbb{R}$ e $]0, +\infty[$ e quindi è invertibile,

la funzione inversa si dice il logaritmo in base a

$$\boxed{\log_a x = y \text{ se e solo se } a^y = x \qquad x > 0}$$

$\log_a \cdot :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$