GEOMETRIA 3

TOPOLOGIA

2021/2022

SPAZI TOPOLOGICI

Siano X un insieme e $\mathcal{T}$ una famiglia di sottoinsiemi di X.

DEF $\mathcal{T}$ è detta *topologia* su X se valgono le seguenti:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

2) $\forall \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
   ($\mathcal{T}$ chiuso rispetto a <u>unioni arbitrarie</u>)

3) $\forall U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
   ($\mathcal{T}$ chiuso rispetto a <u>intersezioni finite</u>).

OSS 3) equivale a

3') $\forall U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Uno spazio topologico è un insieme X munito di una topologia $\mathcal{T}$ su X.

Gli elementi di $\mathcal{T}$ sono detti <u>aperti</u> di X.

Gli elementi di X sono detti <u>punti</u>.

Esempi

1) X insieme arbitrario, $\mathcal{T}_{ban} = \{\emptyset, X\}$
   gli unici aperti sono $\emptyset$ e X (<u>topologia banale</u>)

2) X insieme arbitrario, $\mathcal{T}_{dis} = P(X) = \{U \mid U \subset X\}$
   è l'insieme delle parti di X. Tutti i sottoinsiemi di X sono aperti (<u>topologia discreta</u>), in particolare $\{x\}$ aperto $\forall x \in X$.

Per definire una topologia su X occorre specificare gli aperti di X.

3) (Esempio notevole) $\mathbb{R}$ con la topologia in cui

$$U \subset \mathbb{R} \text{ aperto} \iff \forall\, x \in U \ \exists\, \varepsilon > 0 \text{ t.c. }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U.$$

intervallo aperto

Questa è la topologia naturale su $\mathbb{R}$ e si chiama **topologia Euclidea**.

Mostriamo che soddisfa le proprietà 1), 2), 3)

1) $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sono banalmente aperti

2) $\{U_i\}_{i \in I}$ aperti di $\mathbb{R}$, $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists\, j \in I$ t.c. $x \in U_j \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ aperto

3) U, V aperti di $\mathbb{R}$, $x \in U \cap V \Rightarrow$

$\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ t.c.

$]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset U$, $]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset V$

Posto $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ si ha

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U \cap V$$

$\Rightarrow U \cap V$ aperto in $\mathbb{R}$.

Sottoinsiemi chiusi

Def Sia X spazio topologico. Un sottoinsieme $A \subset X$ è detto <u>chiuso in X</u> se $X - A$ è aperto in X (cioè $X - A \in \mathcal{T}$, dove $\mathcal{T}$ è la topologia di X).

Esempi <u>X banale</u>: gli unici chiusi sono ϕ e X

<u>X discreto</u>: tutti i sottoinsiemi sono chiusi (e aperti)

$\mathbb{R}$: $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ sono chiusi $\forall\, a<b$ (ma esistono molti altri chiusi in $\mathbb{R}$).

$$\mathbb{R} - [a,b] =]-\infty,a[\,\cup\,]b,+\infty[$$

$$\mathbb{R} - [a,+\infty[=]-\infty,a[$$

e gli intervalli $]-\infty,a[$, $]b,+\infty[$ sono aperti $\boxed{E}$

Teorema Sia X spazio topologico. Allora:

1) ϕ, X sono chiusi;

2) $\{A_i\}_{i\in I}$ chiusi $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} A_i$ chiuso;

3) $A_1,\dots,A_n$ chiusi $\Rightarrow$ $A_1 \cup \dots \cup A_n$ chiuso in X.

Dim semplice conseguenza delle leggi di De Morgan:

$$\left(X - \bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X-A_i), \quad X - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(X-A_i)$$

Basi Sia X spazio topologico. Una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti di X è detta **base** per (la topologia di) X se $\forall\ U \subset X$ aperto $\exists\ V_i \in \mathcal{B}$, $i \in I$, t.c. $U = \bigcup_{i\in I} V_i$, cioè ogni aperto di X è unione di aperti basici.

Esempi 1) $X_{dis} \rightsquigarrow \mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ è base per la topologia discreta: $U \subset X \Rightarrow U = \bigcup_{x\in X}\{x\}$.

2) Su $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{]a,b[\mid a<b\}$ è base per la topologia Euclidea.

OSS Una base consente di definire una topologia in modo più agevole.

Teorema Sia X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora $\mathcal{B}$ è base per una topologia su X $\Longleftrightarrow$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$

2) $\forall\ B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall\ x \in B_1 \cap B_2$ $\exists\ B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

In tal caso, posto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup_{B\in J} B \mid J \subset \mathcal{B}\}$, si ha che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è l'unica topologia su X avente $\mathcal{B}$ come base.

Dim ($\Rightarrow$) è conseguenza immediata della definizione di base.

($\Leftarrow$) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia:

1) $\emptyset = \bigcup_{B \in \emptyset} B$ e $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$

2) $U_i \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \ \forall i \in I \Rightarrow U_i =$ unione di elementi di $\mathcal{B}$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ unione di elementi di $\mathcal{B}$

3) $U, V \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, $x \in U \cap V \rightsquigarrow U = \bigcup_{B \in J} B$,

$V = \bigcup_{B \in K} B$, $J, K \subset \mathcal{B} \Rightarrow \exists\ B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ t.c.

$x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists\ B_x \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} B_x \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

4) $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ (ovvio)

Pertanto $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è una topologia avente $\mathcal{B}$ come base.

L'unicità è ovvia.

Def $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è detta topologia generata da $\mathcal{B}$.

Esempio La topologia Euclidea può essere definita come topologia generata da $\mathcal{B} = \{]a,b[\mid a < b \}$.