Lezioni sulle forme differenziali

Prof. Alessandro Fonda, a.a. 2019/2020

1 Gli spazi vettoriali $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$

Consideriamo, per ogni numero naturale M, gli insiemi $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$, formati dalle funzioni $M-$lineari antisimmetriche su $\mathbb{R}^N$, a valori reali, con la convenzione che $\Omega_0(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}$. Essi sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Se scegliamo degli indici $i_1, ..., i_M$ nell'insieme $\{1, ..., N\}$, possiamo definire l'applicazione $M-$lineare antisimmetrica $dx_{i_1,...,i_M}$: è quella funzione che associa ai vettori

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_N^{(1)} \end{pmatrix}, \, ... \, , \, \boldsymbol{v}^{(M)} = \begin{pmatrix} v_1^{(M)} \\ \vdots \\ v_N^{(M)} \end{pmatrix},$$

il numero reale

$$\det \begin{pmatrix} v_{i_1}^{(1)} & ... & v_{i_1}^{(M)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{i_M}^{(1)} & ... & v_{i_M}^{(M)} \end{pmatrix}.$$

Si noti che se due indici coincidono, si ha l'applicazione nulla. Se due indici vengono scambiati, l'applicazione cambia di segno. Richiamiamo il seguente risultato algebrico.

Proposizione. *Se $1 \leq M \leq N$, lo spazio $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$ ha dimensione $\binom{N}{M}$. Una sua base è data da $(dx_{i_1,...,i_M})_{1\leq i_1<...<i_M\leq N}$. Se $M > N$, si ha $\Omega_M(\mathbb{R}^N) = \{0\}$.*

Dimostrazione. Vediamo che gli $dx_{i_1,...,i_M}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N$, sono linearmente indipendenti: sia

$$\sum_{1\leq i_1<...<i_M\leq N} \alpha_{i_1,...,i_M} \, dx_{i_1,...,i_M} = 0 \, .$$

Fissiamo $1 \leq j_1 < ... < j_M \leq N$ e dimostriamo che $\alpha_{j_1,...,j_M} = 0$. Applicando l'espressione scritta sopra alla M-pla di vettori della base canonica $\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_M}$, abbiamo che

$$\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} \alpha_{i_1,...,i_M} \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & ... & \delta_{i_1 j_M} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \delta_{i_M j_1} & ... & \delta_{i_M j_M} \end{pmatrix} = 0\,.$$

(Qui δ_{ij} è il simbolo di Kronecker: vale 1 se $i = j$, altrimenti vale 0.) Si vede allora che, siccome $1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N$ e $1 \leq j_1 < ... < j_M \leq N$, tutti i determinanti scritti sopra sono nulli tranne quello in cui $\{i_1 = j_1, ..., i_M = j_M\}$, che vale 1. Ne segue che $\alpha_{j_1,...,j_M} = 0$.

Resta da dimostrare che $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è generato dai $dx_{i_1,...,i_M}$. Sia dunque φ un elemento di $\Omega_M(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(M)}) &= \varphi\left(\sum_{k_1=1}^{N} v_{k_1}^{(1)} \boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \sum_{k_M=1}^{N} v_{k_M}^{(M)} \boldsymbol{e}_{k_M}\right) \\ &= \sum_{k_1,...,k_M=1}^{N} \varphi(\boldsymbol{e}_{k_1}, ..., \boldsymbol{e}_{k_M}) v_{k_1}^{(1)} \cdots v_{k_M}^{(M)}\,. \end{aligned}$$

Di questa somma dobbiamo considerare solo i temini con indici distinti, essendo φ antisimmetrica. Allora la somma per $k_1, ..., k_M$ che vanno da 1 a N può essere fatta prendendo in tutti i modi possibili degli indici $1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N$ e considerando tutte le loro permutazioni $i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(M)}$, con $\sigma : \{1, ..., M\} \to \{1, ..., M\}$. Scriveremo quindi

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1,...,k_M=1}^{N} \varphi(\boldsymbol{e}_{k_1}, ..., \boldsymbol{e}_{k_M}) v_{k_1}^{(1)} \cdots v_{k_M}^{(M)} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} \sum_{\sigma} \varphi(\boldsymbol{e}_{i_{\sigma(1)}}, ..., \boldsymbol{e}_{i_{\sigma(M)}}) v_{i_{\sigma(1)}}^{(1)} \cdots v_{i_{\sigma(M)}}^{(M)}\,. \end{aligned}$$

Riordinando tutti i termini $\boldsymbol{e}_{i_{\sigma(1)}}, ..., \boldsymbol{e}_{i_{\sigma(M)}}$ e tenendo conto del fatto che scambiando due vettori il valore di φ cambia segno, otteniamo

$$\varphi(\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(M)}) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} \varphi(\boldsymbol{e}_{i_1}, ..., \boldsymbol{e}_{i_M}) \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma v_{i_{\sigma(1)}}^{(1)} \cdots v_{i_{\sigma(M)}}^{(M)}\,,$$

dove ε_σ denota il segno di ogni permutazione $\sigma : \{1, ..., M\} \to \{1, ..., M\}$. Per la definizione di determinante, abbiamo quindi

$$\varphi(\boldsymbol{v}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{v}^{(M)}) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \varphi(\boldsymbol{e}_{i_1},...,\boldsymbol{e}_{i_M}) \det \begin{pmatrix} v_{i_1}^{(1)} & ... & v_{i_1}^{(M)} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ v_{i_M}^{(1)} & ... & v_{i_M}^{(M)} \end{pmatrix} ,$$

ossia

$$\varphi = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \varphi(\boldsymbol{e}_{i_1},...,\boldsymbol{e}_{i_M}) dx_{i_1,...,i_M} .$$

La dimostrazione è così completa. ■

Ci interessa in particolar modo il caso $N = 3$. Andiamo a vedere più da vicino come sono fatti gli spazi $\Omega_1(\mathbb{R}^3)$, $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$ e $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$.

Consideriamo $\Omega_1(\mathbb{R}^3)$, lo spazio delle applicazioni lineari definite su $\mathbb{R}^3$, a valori in $\mathbb{R}$. Indicheremo con dx_1, dx_2, dx_3 le seguenti applicazioni lineari:

$$dx_1 : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_1 , \quad dx_2 : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_2 , \quad dx_3 : \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto v_3 .$$

Si ha che $\Omega_1(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione 3 e (dx_1, dx_2, dx_3) ne è una base.

Consideriamo $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$, lo spazio delle applicazioni bilineari antisimmetriche definite su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, a valori in $\mathbb{R}$. Esso ha dimensione 3, e una sua base è data da $(dx_{1,2}, dx_{1,3}, dx_{2,3})$, con

$$dx_{1,2} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{pmatrix} = v_1 v_2' - v_2 v_1' ,$$

$$dx_{1,3} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 & v_1' \\ v_3 & v_3' \end{pmatrix} = v_1 v_3' - v_3 v_1' ,$$

$$dx_{2,3} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_2 & v_2' \\ v_3 & v_3' \end{pmatrix} = v_2 v_3' - v_3 v_2' .$$

È utile ricordare che si ha:

$$dx_{1,1} = dx_{2,2} = dx_{3,3} = 0 ,$$

$$dx_{2,1} = -dx_{1,2} , \quad dx_{3,1} = -dx_{1,3} , \quad dx_{3,2} = -dx_{2,3} .$$

Consideriamo $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$, lo spazio delle applicazioni trilineari antisimmetriche definite su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, a valori in $\mathbb{R}$. Indichiamo con $dx_{1,2,3}$ la seguente applicazione trilineare antisimmetrica:

$$dx_{1,2,3} : \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ v_3'' \end{pmatrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} v_1 \, v_1' \, v_1'' \\ v_2 \, v_2' \, v_2'' \\ v_3 \, v_3' \, v_3'' \end{pmatrix} .$$

Ogni elemento dello spazio vettoriale $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$ è multiplo di $dx_{1,2,3}$. Si ha che $\Omega_3(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione 1. Ricordiamo che

$$dx_{1,2,3} = dx_{2,3,1} = dx_{3,1,2} = -dx_{3,2,1} = -dx_{2,1,3} = -dx_{1,3,2}$$

e, se due indici coincidono, si ha l'applicazione nulla.

2 Forme differenziali in $\mathbb{R}^N$

Definizione. *Dato un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^N$, chiameremo* **forma differenziale di grado** M *(o $M-$forma differenziale) una funzione $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$.*

Se $M \geq 1$, considerata la base $(dx_{i_1,\dots,i_M})_{1\leq i_1<\dots<i_M\leq N}$, le componenti della $M-$forma differenziale ω verranno denotate con $f_{i_1,\dots,i_M} : U \to \mathbb{R}$. Scriveremo quindi:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_M\leq N} f_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\dots,i_M} .$$

Pertanto, l'applicazione $M-$lineare antisimmetrica $\omega(\boldsymbol{x})$ è determinata dal vettore $\binom{N}{M}-$dimensionale

$$F(\boldsymbol{x}) = (f_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x}))_{1\leq i_1<\dots<i_M\leq N} .$$

Una $0-$forma differenziale non è altro che una funzione definita su U a valori in $\mathbb{R}$. Diremo che una $M-$forma differenziale è di classe C^k se tutte le sue componenti lo sono.

Si può definire la somma di due $M-$forme differenziali: se ω è come sopra e $\tilde{\omega}$, anch'essa definita su U, è del tipo

$$\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_M\leq N} g_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\dots,i_M} ,$$

si definisce in modo naturale $\omega + \tilde{\omega}$ come segue:

$$(\omega + \tilde{\omega})(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_M\leq N} (f_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x}) + g_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x}))\, dx_{i_1,\dots,i_M} .$$

Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$, si definisce $c\,\omega$, il prodotto dello scalare c per la $M-$forma differenziale ω, nel modo seguente:

$$(c\,\omega)(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_M \leq N} c f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\ldots,i_M}\,.$$

Con queste definizioni, l'insieme delle forme differenziali di grado M risulta essere uno spazio vettoriale.

Vediamo da vicino il caso $N = 3$. Consideriamo un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^3$. Se indichiamo con ω_M una $M-$forma differenziale, avremo, nei casi $M = 1, 2, 3$, le seguenti possibilità:

$$\begin{aligned}
\omega_1(\boldsymbol{x}) &= f_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,,\\
\omega_2(\boldsymbol{x}) &= f_{1,2}(\boldsymbol{x})\, dx_{1,2} + f_{1,3}(\boldsymbol{x})\, dx_{1,3} + f_{2,3}(\boldsymbol{x}) dx_{2,3}\,,\\
\omega_3(\boldsymbol{x}) &= f_{1,2,3}(\boldsymbol{x})\, dx_{1,2,3}\,.
\end{aligned}$$

Si noti che $\omega_1(\boldsymbol{x})$ e $\omega_2(\boldsymbol{x})$ sono determinate dai vettori tridimensionali $F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))$ e $G(\boldsymbol{x}) = (f_{12}(\boldsymbol{x}), f_{13}(\boldsymbol{x}), f_{23}(\boldsymbol{x}))$, rispettivamente.

3 Prodotto esterno

Date due forme differenziali $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{\omega} : U \to \Omega_{\tilde{M}}(\mathbb{R}^N)$, di grado M e $\tilde{M}$, rispettivamente, vogliamo definire la forma differenziale $\omega \wedge \tilde{\omega}$, di grado $M + \tilde{M}$, che si dice **prodotto esterno** di ω e $\tilde{\omega}$. Se

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_M \leq N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\ldots,i_M}\,,$$

$$\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_{\tilde{M}} \leq N} g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}}(\boldsymbol{x})\, dx_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}}\,,$$

si pone

$$(\omega \wedge \tilde{\omega})(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_M \leq N \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_{\tilde{M}} \leq N}} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x}) g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}}\,.$$

Di solito si omette il simbolo $\wedge$ qualora una delle due è una $0-$forma differenziale, in quanto il prodotto esterno assomiglia, in questo caso, al prodotto per uno scalare. Si noti che nella sommatoria saranno nulli tutti gli elementi in cui un indice compare due volte. Vediamo ora alcune proprietà.

Proposizione. *Se $\omega, \tilde\omega, \tilde{\tilde\omega}$ sono tre forme differenziali di grado M, $\tilde M$, $\tilde{\tilde M}$, rispettivamente, allora:*

$$\tilde\omega \wedge \omega = (-1)^{M\tilde M} \omega \wedge \tilde\omega \,,$$

$$(\omega \wedge \tilde\omega) \wedge \tilde{\tilde\omega} = \omega \wedge (\tilde\omega \wedge \tilde{\tilde\omega}) \,;$$

se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$(c\,\omega) \wedge \tilde\omega = \omega \wedge (c\,\tilde\omega) = c(\omega \wedge \tilde\omega) \,;$$

inoltre, nel caso in cui $M = \tilde M$, si ha

$$(\omega + \tilde\omega) \wedge \tilde{\tilde\omega} = (\omega \wedge \tilde{\tilde\omega}) + (\tilde\omega \wedge \tilde{\tilde\omega}) \,,$$

$$\tilde{\tilde\omega} \wedge (\omega + \tilde\omega) = (\tilde{\tilde\omega} \wedge \omega) + (\tilde{\tilde\omega} \wedge \tilde\omega) \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che ω e $\tilde\omega$ siano della forma scritta sopra, e sia

$$\tilde{\tilde\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_{\tilde{\tilde M}} \le N} h_{k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}}(\boldsymbol{x})\, dx_{k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}} \,.$$

La prima uguaglianza si ottiene osservando che, per arrivare dalla sequenza di indici $i_1, \ldots, i_M, j_1, \ldots, j_{\tilde M}$ alla $j_1, \ldots, j_{\tilde M}, i_1, \ldots, i_M$, bisogna dapprima spostare j_1 verso sinistra operando M scambi, poi fare lo stesso per l'eventuale j_2, e così via fino a $j_{\tilde M}$. In totale, sono quindi necessari $M\tilde M$ scambi di indici. Tenuto conto che ad ogni scambio la forma differenziale cambia di segno, si ha la formula cercata.

La dimostrazione della seconda uguaglianza (proprietà associativa) non presenta difficoltà di rilievo, come pure le uguaglianze in cui compare la costante c.

Per quanto riguarda la proprietà distributiva, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&((\omega + \tilde\omega) \wedge \tilde{\tilde\omega})(\boldsymbol{x}) = \\
&= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N \\ 1 \le k_1 < \ldots < k_{\tilde{\tilde M}} \le N}} (f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x}) + \\
&\qquad\qquad + g_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})) h_{k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\ldots,i_M,k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}} \\
&= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N \\ 1 \le k_1 < \ldots < k_{\tilde{\tilde M}} \le N}} (f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x}) h_{k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}}(\boldsymbol{x}) + \\
&\qquad\qquad + g_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x}) h_{k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}}(\boldsymbol{x}))\, dx_{i_1,\ldots,i_M,k_1,\ldots,k_{\tilde{\tilde M}}} \\
&= ((\omega \wedge \tilde{\tilde\omega}) + (\tilde\omega \wedge \tilde{\tilde\omega}))(\boldsymbol{x}) \,.
\end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza si dimostra in modo analogo, oppure usando la prima e la quarta. ■

Se consideriamo il caso particolare delle due forme differenziali costanti

$$\omega(\boldsymbol{x}) = dx_1 \ , \quad \tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = dx_2$$

(per ogni $\boldsymbol{x} \in U$), avremo che $(\omega \wedge \tilde{\omega})(\boldsymbol{x}) = dx_{1,2}$, per ogni $\boldsymbol{x} \in U$. Possiamo quindi scrivere

$$dx_1 \wedge dx_2 = dx_{1,2} \, .$$

Più in generale, in vista della proprietà associativa del prodotto esterno, possiamo scrivere:

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} = dx_{i_1,...,i_M} \, .$$

Nel seguito, useremo indifferentemente l'una o l'altra scrittura.

4 Differenziale esterno

Data una $M-$forma differenziale ω di classe C^1, vogliamo definire la forma differenziale $d_{ex}\omega$, di grado $M+1$, che si dice **differenziale esterno** di ω.

Se ω è una $0-$forma differenziale, $\omega = f : U \to \mathbb{R}$, il suo differenziale esterno $d_{ex}\omega(\boldsymbol{x})$ non sarà altro che il differenziale $df(\boldsymbol{x})$, applicazione lineare definita in $\mathbb{R}^N$, a valori in $\mathbb{R}$. Essendo, per ogni $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_N)$,

$$df(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\, v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\boldsymbol{x})\, v_N$$

si ha:

$$df(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\, dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\boldsymbol{x})\, dx_N = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m \, .$$

Nel caso generale, se

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \ ,$$

poniamo

$$d_{ex}\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} df_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \ ,$$

o, equivalentemente,

$$d_{ex}\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f_{i_1,...,i_M}}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \, .$$

Nel seguito, per comodità di scrittura, scriveremo sempre $d\omega$ al posto di $d_{ex}\omega$. Vediamo alcune proprietà del differenziale esterno.

Proposizione. *Se ω e $\tilde{\omega}$ sono due forme differenziali di classe C^1, di grado M e $\tilde{M}$, rispettivamente, si ha:*

$$d(\omega \wedge \tilde{\omega}) = d\omega \wedge \tilde{\omega} + (-1)^M \omega \wedge d\tilde{\omega}\,;$$

se $M = \tilde{M}$ e $c \in \mathbb{R}$, allora

$$d(\omega + \tilde{\omega}) = d\omega + d\tilde{\omega}\,,$$
$$d(c\,\omega) = c\,d\omega\,;$$

se ω è di classe C^2, allora

$$d(d\omega) = 0\,.$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima uguaglianza, se ω e $\tilde{\omega}$ sono come sopra, si ha:

$$\begin{aligned}
& d(\omega \wedge \tilde{\omega})(\boldsymbol{x}) = \\
&= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_M\le N\\ 1\le j_1<\ldots<j_{\tilde{M}}\le N}} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_m}(f_{i_1,\ldots,i_M} g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}})(\boldsymbol{x})\, dx_{m,i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}} \\
&= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_M\le N\\ 1\le j_1<\ldots<j_{\tilde{M}}\le N}} \sum_{m=1}^{N} \Bigg(\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_M}}{\partial x_m} g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}} + \\
&\qquad\qquad + f_{i_1,\ldots,i_M} \frac{\partial g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}}}{\partial x_m} \Bigg)(\boldsymbol{x}) dx_{m,i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}} \\
&= \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_M\le N\\ 1\le j_1<\ldots<j_{\tilde{M}}\le N}} \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_M}}{\partial x_m} g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}} \right)(\boldsymbol{x})\, dx_{m,i_1,\ldots,i_M,j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}} + \\
& + (-1)^M \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_M\le N\\ 1\le j_1<\ldots<j_{\tilde{M}}\le N}} \sum_{m=1}^{N} \left(f_{i_1,\ldots,i_M} \frac{\partial g_{j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}}}{\partial x_m} \right)(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1,\ldots,i_M,m,j_1,\ldots,j_{\tilde{M}}} \\
&= (d\omega \wedge \tilde{\omega})(\boldsymbol{x}) + (-1)^M (\omega \wedge d\tilde{\omega})(\boldsymbol{x})\,.
\end{aligned}$$

La seconda e la terza uguaglianza seguono facilmente dalla linearità della derivata. Per quanto riguarda l'ultima uguaglianza, abbiamo:

$$d(d\omega)(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_M\le N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_M}}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_{k,m,i_1,\ldots,i_M}\,.$$

Tenuto conto che

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_M}}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_M}}{\partial x_k}$$

e del fatto che $dx_k \wedge dx_m = -dx_m \wedge dx_k$, si vede che gli addendi delle sommatorie si eliminano a due a due, per cui si ha $d(d\omega)(\boldsymbol{x}) = 0$. ■

5 Forme differenziali in $\mathbb{R}^3$

Nel caso $N = 3$, se ω_1 e $\tilde{\omega}_1$ sono due 1-forme differenziali,

$$\begin{aligned}\omega_1(\boldsymbol{x}) &= f_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,,\\ \tilde{\omega}_1(\boldsymbol{x}) &= g_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + g_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + g_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,,\end{aligned}$$

usando le proprietà distributiva e associativa si ottiene:

$$\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1 = (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, dx_{1,2} + (f_1 g_3 - f_3 g_1)\, dx_{1,3} + (f_2 g_3 - f_3 g_2)\, dx_{2,3}\,.$$

Se invece ω_1 è una 1-forma differenziale e ω_2 è una 2-forma differenziale,

$$\begin{aligned}\omega_1(\boldsymbol{x}) &= f_1(\boldsymbol{x}) dx_1 + f_2(\boldsymbol{x}) dx_2 + f_3(\boldsymbol{x}) dx_3\,,\\ \omega_2(\boldsymbol{x}) &= g_{1,2}(\boldsymbol{x})\, dx_{1,2} + g_{1,3}(\boldsymbol{x})\, dx_{1,3} + g_{2,3}(\boldsymbol{x})\, dx_{2,3}\,,\end{aligned}$$

si ha:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 g_{2,3} - f_2 g_{1,3} + f_3 g_{1,2})\, dx_{1,2,3}\,.$$

Se abbiamo una 0-forma differenziale $\omega_0 = f : U \to \mathbb{R}$, allora

$$d\omega_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\, dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\, dx_3\,.$$

Se abbiamo una 1-forma differenziale

$$\omega_1(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + f_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + f_3(\boldsymbol{x})\, dx_3\,,$$

allora

$$\begin{aligned}d\omega_1(\boldsymbol{x}) = & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_2 + \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_3 + \\ & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) dx_2 \wedge dx_3\,.\end{aligned}$$

Se abbiamo una 2-forma differenziale

$$\omega_2(\boldsymbol{x}) = f_{1,2}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 + f_{1,3}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_3 + f_{2,3}(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3\,,$$

allora

$$d\omega_2(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f_{2,3}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_{1,3}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f_{1,2}}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,.$$

A questo punto, osserviamo che una scelta della base per lo spazio vettoriale $\Omega_2(\mathbb{R}^3)$ più adatta alle applicazioni potrebbe essere la seguente:

$$(dx_{2,3}\,, dx_{3,1}\,, dx_{1,2})\ .$$

Infatti, in questo modo, associando

• a ogni funzione scalare $f : U \to \mathbb{R}$
  una $0-$forma differenziale $\omega_0 = f$, oppure
  una $3-$forma differenziale $\omega_3 = f\,dx_{1,2,3}$;
• a ogni campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3) : U \to \mathbb{R}^3$
  una $1-$forma differenziale $\omega_1 = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + F_3\,dx_3$, oppure
  una $2-$forma differenziale $\omega_2 = F_1\,dx_{2,3} + F_2\,dx_{3,1} + F_3\,dx_{1,2}$,

si ha che:

$d\omega_0$ corrisponde al **gradiente** di f :

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right);$$

$d\omega_1$ corrisponde al **rotore** di F :

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\,,\, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\,,\, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right);$$

$d\omega_2$ corrisponde alla **divergenza** di F :

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\,.$$

Allora, presi due campi di vettori F e $\tilde{F}$, considerate le $1-$forme differenziali associate

$$\omega_1 = F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 + F_3\,dx_3\,, \qquad \tilde{\omega}_1 = \tilde{F}_1\,dx_1 + \tilde{F}_2\,dx_2 + \tilde{F}_3\,dx_3\,,$$

si ha che $\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_1$ corrisponde al **prodotto vettoriale** di F e $\tilde{F}$:

$$F \times \tilde{F} = (F_2\tilde{F}_3 - F_3\tilde{F}_2\;,\; F_3\tilde{F}_1 - F_1\tilde{F}_3\;,\; F_1\tilde{F}_2 - F_2\tilde{F}_1)\,;$$

se invece di $\tilde{\omega}_1$ consideriamo la $2-$forma differenziale

$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{F}_1\,dx_2 \wedge dx_3 + \tilde{F}_2\,dx_3 \wedge dx_1 + \tilde{F}_3\,dx_1 \wedge dx_2\,,$$

si ha che $\omega_1 \wedge \tilde{\omega}_2$ corrisponde al **prodotto scalare** di F e $\tilde{F}$:

$$\langle F|\tilde{F}\rangle = F_1\tilde{F}_1 + F_2\tilde{F}_2 + F_3\tilde{F}_3\,.$$

Le proprietà del prodotto esterno e del differenziale esterno permettono di dimostrare alcune formule in cui appaiono il gradiente, il rotore o la divergenza. Se $f : U \to \mathbb{R}$, $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^3$ e $\tilde{F} : U \to \mathbb{R}^3$, abbiamo ad esempio le seguenti:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0\,,\\
&\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0\,,\\
&\operatorname{grad}(f\tilde{f}) = \tilde{f}(\operatorname{grad} f) + f(\operatorname{grad}\tilde{f})\,,\\
&\operatorname{rot}(fF) = (\operatorname{grad} f) \times F + f(\operatorname{rot} F)\,,\\
&\operatorname{div}(f\tilde{F}) = \langle \operatorname{grad} f \,|\, \tilde{F}\rangle + f(\operatorname{div}\tilde{F})\,,\\
&\operatorname{div}(F \times \tilde{F}) = \langle \operatorname{rot} F \,|\, \tilde{F}\rangle - \langle F \,|\, \operatorname{rot}\tilde{F}\rangle\,.
\end{aligned}$$

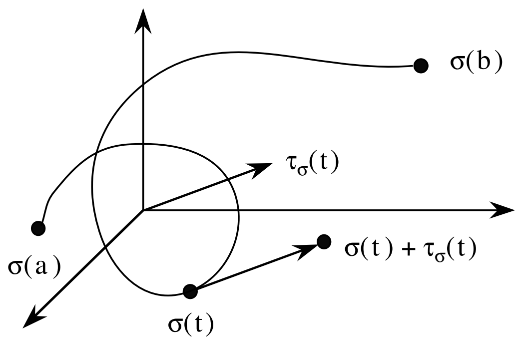
6 $M-$superfici

Indichiamo con I un rettangolo di $\mathbb{R}^M$, dove $1 \leq M \leq N$.

Definizione. *Chiameremo $M-$**superficie in** $\mathbb{R}^N$ una funzione* [1] $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ *di classe C^1. Se $M = 1$, σ si dirà anche* **curva***; se $M = 2$, si dirà semplicemente* **superficie***. L'insieme $\sigma(I)$ è detto* **supporto** *della $M-$superficie σ. Diremo che la $M-$superficie σ è* **regolare** *se, per ogni $\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{I}$, la matrice jacobiana $\sigma'(\boldsymbol{u})$ ha rango M.*

Consideriamo da vicino il caso $N = 3$. Una curva in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La curva è regolare se, per ogni $t \in]a, b[$, il vettore $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), \sigma_3'(t))$ è non nullo. In tal caso, si definisce il seguente **versore tangente** nel punto $\sigma(t)$:

$$\tau_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{||\sigma'(t)||} .$$



Esempio. La curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(t) = (R\cos(2t), R\sin(2t), 0)$$

ha come supporto la circonferenza

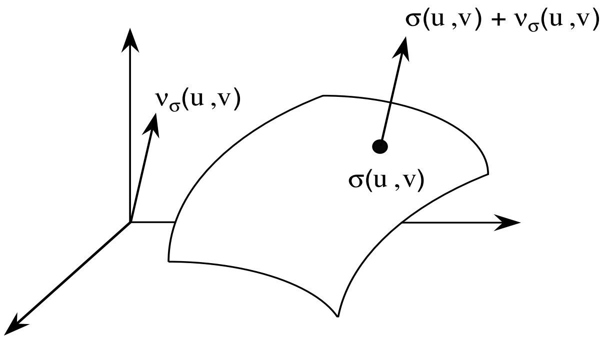
$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$$

(che viene percorsa due volte). Essendo $\sigma'(t) = (-2R\sin(2t), 2R\cos(2t), 0)$, si tratta di una curva regolare, e si ha:

$$\tau_\sigma(t) = (-\sin(2t), \cos(2t), 0) .$$

[1] Le derivate parziali di σ devono essere continue su tutto I e nei punti di frontiera vanno intese, se necessario, come derivate destre o sinistre. Equivalentemente, si potrebbe estendere σ ad una funzione di classe C^1 definita su un aperto contenente I (a questo riguardo, si veda un articolo di H. Whitney su "Transactions of the American Mathematical Society", del 1934). In questa ottica, il dominio di σ potrebbe essere un insieme più generale, ad esempio la chiusura di un aperto limitato, affinché il differenziale risulti ben definito anche nei punti di frontiera. Considerazioni analoghe si possono fare per quanto riguarda il dominio delle forme differenziali.

Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$. La superficie è regolare se, per ogni $(u, v) \in]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$, i vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)$ sono linearmente indipendenti. In tal caso, essi individuano un piano, detto **piano tangente** alla superficie nel punto $\sigma(u, v)$, e si definisce il seguente **versore normale**:



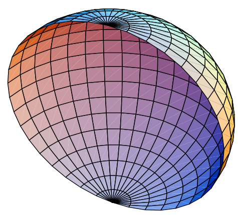
$$\nu_\sigma(u, v) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)}{||\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)||}\,.$$

Esempi. 1. La superficie $\sigma : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi)$$

ha come supporto la semisfera

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0\}\,.$$



Essendo

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\phi, \theta) = (R \cos\phi \cos\theta, R \cos\phi \sin\theta, -R \sin\phi)\,,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\phi, \theta) = (-R \sin\phi \sin\theta, R \sin\phi \cos\theta, 0)\,,$$

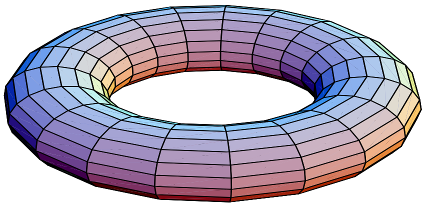
si tratta di una superficie regolare, e si ha:

$$\nu_\sigma(\phi, \theta) = (\sin\phi \cos\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\phi)\,.$$

2. La superficie $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

dove $0 < r < R$, ha come supporto l'anello toroidale o "toro"



$$\{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}\,.$$

Si può verificare che anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.

Una 3-superficie in $\mathbb{R}^3$ si dice anche **volume**.

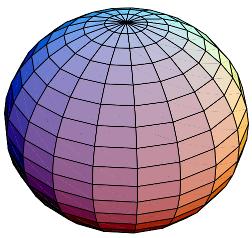
Esempio. La funzione $\sigma : [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi)$$

ha come supporto la palla chiusa

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}\,.$$

In questo caso, $\det \sigma'(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \sin\phi$ e pertanto si tratta di un volume regolare.



Definizione. *Due $M-$superfici $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ si dicono* **equivalenti** *se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subset I$, $B \subset J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono* *trascurabili e, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))$. Diremo che σ e $\tilde{\sigma}$ hanno la* **stessa orientazione** *se* $\det \varphi'(\boldsymbol{u}) > 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in A$; *diremo che hanno* **orientazione opposta** *se* $\det \varphi'(\boldsymbol{u}) < 0$ *per ogni* $\boldsymbol{u} \in A$.

Esempi. Data una curva $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, una curva ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\tilde{\sigma}(t) = \sigma(a + b - t)\,.$$

Se σ è regolare, un esempio interessante di curva equivalente con la stessa orientazione si ottiene considerando la funzione

$$\varphi(t) = \int_a^t ||\sigma'(r)||\, dr\,.$$

Siccome $\varphi'(t) = ||\sigma'(t)|| > 0$ per ogni $t \in]a,b[$, ponendo $\iota_1 = \varphi(b)$, si ha che $\varphi : [a,b] \to [0,\iota_1]$ è biietiva e la curva $\sigma_1(s) = \sigma(\varphi^{-1}(s))$ è equivalente a σ. Si noti che, per ogni $s \in]0,\iota_1[$, si ha

$$\begin{aligned}
||\sigma_1'(s)|| &= ||\sigma'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1})'(s)|| \\
&= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \right\| \\
&= \left\| \sigma'(\varphi^{-1}(s)) \frac{1}{||\sigma'(\varphi^{-1}(s))||} \right\| = 1\,.
\end{aligned}$$

Data una superficie $\sigma : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$, una superficie ad essa equivalente con orientazione opposta è, ad esempio, $\tilde{\sigma} : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma(u, a_2 + b_2 - v)\,,$$

oppure da

$$\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma(a_1 + b_1 - u, v)\,.$$

Come vedremo in seguito, non sempre due $M-$superfici aventi lo stesso supporto sono equivalenti. Introduciamo una classe particolare di $M-$superfici per le quali questo inconveniente non si verifica.

Definizione. *Una $M-$superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è una $M-$***parametrizzazione** *di un insieme $\mathcal{M}$ se è regolare, iniettiva su $\overset{\circ}{I}$, e $\sigma(I) = \mathcal{M}$. Diremo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è $M-$***parametrizzabile** *se esiste una sua $M-$parametrizzazione.*

Esempi. La circonferenza $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è parametrizzabile e $\sigma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, ne è una parametrizzazione.

Una parametrizzazione della sfera $\mathcal{M} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è, ad esempio, $\sigma : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$\sigma(\phi,\theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

Teorema. *Due $M-$parametrizzazioni di uno stesso insieme sono sempre equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ considerato, e siano $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde{\sigma} : J \to \mathbb{R}^N$ due sue $M-$parametrizzazioni. Definiamo gli insiemi

$$A = \mathring{I} \cap \sigma^{-1}(\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J)))\,, \qquad B = \mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J)))\,.$$

Allora, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, essendo $\sigma(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$ e $\tilde{\sigma}(J) = \mathcal{M}$, esiste un $\boldsymbol{v} \in \mathring{J}$ tale che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) = \sigma(\boldsymbol{u})$. Chiaramente, si ha che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$, per cui $\boldsymbol{v} \in B$. Inoltre, siccome $\tilde{\sigma}$ è iniettiva su $\mathring{J}$, esiste un unico $\boldsymbol{v}$ in $\mathring{J}$ con tale proprietà. Possiamo quindi definire $\varphi : A \to B$ ponendo $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Pertanto, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$ e $\boldsymbol{v} \in B$,

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})\,.$$

Questa funzione $\varphi : A \to B$ è invertibile: un argomento simmetrico può essere usato per definire la sua inversa $\varphi^{-1} : B \to A$.

Verifichiamo che A è un insieme apetro. Poiché σ, $\tilde{\sigma}$ sono funzioni continue e ∂I, ∂J sono insiemi compatti, si ha che $\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J)$ è compatto, e pertanto chiuso. Allora $\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$ è relativamente aperto in $\mathcal{M}$, e $\sigma^{-1}(\mathcal{M} \setminus (\sigma(\partial I) \cup \tilde{\sigma}(\partial J))$ è relativamente aperto in I, per cui la sua intersezione con $\mathring{I}$ è un insieme aperto. In modo analogo si dimostra che anche B è un insieme aperto.

Prendiamo un $\boldsymbol{v}_0 \in \mathring{J}$, e poniamo $\boldsymbol{x}_0 = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0)$. La matrice jacobiana $\tilde{\sigma}'(\boldsymbol{v}_0)$ ha rango M, e possiamo supporre senza perdita di generalità che le prime M righe siano linearmente indipendenti. Essendo $\mathbb{R}^N \simeq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M}$, scriveremo ogni punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ nella forma $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, con $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^M$ e $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^{N-M}$. Inoltre, per non avere doppi indici in basso, scriveremo $\boldsymbol{x}_0 = (\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0)$.

Sia $\Phi : J \times \mathbb{R}^{N-M} \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{z})\,.$$

Allora $\Phi'(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{0})$ è invertibile, per cui Φ è un diffeomorfiismo locale: esistono un intorno aperto V_0 di $\boldsymbol{v}_0$, un intorno aperto Ω_0 di $\boldsymbol{0}$ in $\mathbb{R}^{N-M}$, e un intorno aperto W_0 di $\boldsymbol{x}_0$ tali che $\Phi : V_0 \times \Omega_0 \to W_0$ è un diffeomorfismo. Inoltre, possiamo assumere che $V_0 \subseteq \mathring{J}$. Sia $\Psi = \Phi^{-1} : W_0 \to V_0 \times \Omega_0$. Scriveremo $\Psi(\boldsymbol{x}) = (\Psi_1(\boldsymbol{x}), \Psi_2(\boldsymbol{x}))$, con $\Psi_1(\boldsymbol{x}) \in V_0$ e $\Psi_2(\boldsymbol{x}) \in \Omega_0$.

Dimostriamo ora che φ è di classe $\mathcal{C}^1$. Prendiamo un $\boldsymbol{u}_0 \in A$, e poniamo $\boldsymbol{x}_0 = \sigma(\boldsymbol{u}_0)$ e $\boldsymbol{v}_0 = \varphi(\boldsymbol{u}_0)$. Sia $\boldsymbol{v}_0$ come sopra, con $\tilde{\sigma}'(\boldsymbol{v}_0)$ avente le prime M righe linearmente independenti, per cui possiamo definire il diffeomorfismo locale $\Psi : W_0 \to V_0 \times \Omega_0$. Prendiamo un intorno aperto U_0 di $\boldsymbol{u}_0$, contenuto in A, tale che $\sigma(U_0) \subseteq W_0$. Allora, per $\boldsymbol{u} \in U_0$ e $\boldsymbol{v} \in B$,

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\boldsymbol{u}) = \Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = \Psi(\sigma(\boldsymbol{u}))\,.$$

Pertanto, φ coincide con $\Psi_1 \circ \sigma$ sull'insieme aperto U_0, il che mostra che φ è differenziabile con differenziale continuo.

In modo simmetrico si dimostra che $\varphi^{-1} : B \to A$ è di classe $\mathcal{C}^1$, per cui φ risulta essere un diffeomorfismo.

Dimostriamo ora che gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono trascurabili. Prendiamo in considerazione, ad esempio, il secondo:

$$J \setminus B = \partial J \cup (\mathring{J} \setminus B) = \partial J \cup \{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(\partial I)\} \cup \{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \tilde{\sigma}(\partial J)\} .$$

Sappiamo che ∂J è trascurabile; proviamo che $\{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(\partial I)\}$ è anch'esso trascurabile.

Sia $\boldsymbol{v}_0 \in \mathring{J}$ tale che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0) \in \sigma(\partial I)$. Allora esiste un $\boldsymbol{u}_0 \in \partial I$ tale che $\sigma(\boldsymbol{u}_0) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0)$. Ragionando come sopra, definiamo $\Psi : W_0 \to V_0 \times \Omega_0$. Sia U_0 un intorno aperto di $\boldsymbol{u}_0$ tale che $\sigma(U_0 \cap I) \subseteq W_0$. Dimostriamo che

$$\mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U_0 \cap \partial I)) \subseteq (\Psi_1 \circ \sigma)(U_0 \cap \partial I) .$$

In effetti, prendendo $\boldsymbol{v} \in \mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\sigma(U_0 \cap \partial I))$, abbiamo che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(U_0 \cap \partial I)$. Allora, essendo $\Phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})$, abbiamo che $\Psi(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) \in V_0 \times \Omega_0$, da cui $\boldsymbol{v} \in \Psi_1(\sigma(U_0 \cap \partial I))$, e l'inclusione è così dimostrata. Ora, siccome $\Psi_1 \circ \sigma$ è di classe $\mathcal{C}^1$, abbiamo che $(\Psi_1 \circ \sigma)(U_0 \cap \partial I)$ è trascurabile. Infine, la conclusione che $\{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \sigma(\partial I)\}$ è trascurabile segue dal fatto che ∂I è compatto, e pertanto può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti come U_0.

Resta da dimostrare che $\{\boldsymbol{v} \in \mathring{J} : \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}) \in \tilde{\sigma}(\partial J)\}$ è trascurabile. Sia $\boldsymbol{v}_0 \in \mathring{J}$ tale che $\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0) \in \tilde{\sigma}(\partial J)$. Allora, esiste un $\tilde{\boldsymbol{v}}_0 \in \partial J$ tale che $\tilde{\sigma}(\tilde{\boldsymbol{v}}_0) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}_0)$. Sia $\widetilde{V}_0$ un intorno aperto di $\tilde{\boldsymbol{v}}_0$ tale che $\tilde{\sigma}(\widetilde{V}_0 \cap J) \subseteq W_0$. Come sopra si vede che $\mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\sigma}(\widetilde{V}_0 \cap \partial J)) \subseteq (\Psi_1 \circ \tilde{\sigma})(\widetilde{V}_0 \cap \partial J)$, il che mostra che $\mathring{J} \cap \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\sigma}(\widetilde{V}_0 \cap \partial J))$ è trascurabile. La conclusione segue come sopra, ricoprendo ∂J con un numero finito di insiemi aperti come $\widetilde{V}_0$. ■

7 Integrale di una forma differenziale

Vogliamo ora definire la nozione di integrale di una $M-$forma differenziale su una $M-$superficie. Supponiamo di avere una $M-$forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_M \leq N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} ,$$

definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^N$ contenente il supporto di una $M-$superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$, con $1 \leq M \leq N$. Possiamo considerare, al variare degli indici $i_1, \ldots, i_M$, le funzioni $\sigma_{(i_1,...,i_M)} : I \to \mathbb{R}^M$ definite da

$$\sigma_{(i_1,...,i_M)} : \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_{i_1}(u_1,...,u_M) \\ \vdots \\ \sigma_{i_M}(u_1,...,u_M) \end{pmatrix}.$$

Definizione. *Diremo che la $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è integrabile sulla $M-$superficie $\sigma : I \to U$ se, per ogni scelta degli indici $i_1,...,i_M$ nell'insieme $\{1,...,N\}$, si ha che $(f_{i_1,...,i_M} \circ \sigma) \det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$\int_\sigma \omega = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} \int_I f_{i_1,...,i_M}(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Ad esempio, ω sarà integrabile su σ qualora tutte le sue componenti siano funzioni continue. Notiamo che si ha:

$$\sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial(\sigma_{i_1},...,\sigma_{i_M})}{\partial(u_1,...,u_M)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_{i_1}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & ... & \frac{\partial\sigma_{i_1}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial\sigma_{i_M}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & ... & \frac{\partial\sigma_{i_M}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}.$$

Se definiamo, per ogni $\boldsymbol{x} \in U$ e per ogni $\boldsymbol{u} \in I$ i vettori $\binom{N}{M}-$dimensionali

$$F(\boldsymbol{x}) = (f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x}))_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N}\,,$$
$$\Sigma(\boldsymbol{u}) = \Big(\det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N}\,,$$

si ha che

$$\int_\sigma \omega = \int_I \langle F(\sigma(\boldsymbol{u}))|\Sigma(\boldsymbol{u})\rangle\, d\boldsymbol{u}\,,$$

dove $\langle\cdot|\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^{\binom{N}{M}}$.

È importante vedere come cambia l'integrale di una forma differenziale ω su due $M-$superfici equivalenti aventi la stessa orientazione oppure orientazione opposta.

Teorema. *Siano $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde\sigma : J \to \mathbb{R}^N$ due $M-$superfici equivalenti. Se hanno la stessa orientazione, allora*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\tilde\sigma} \omega\,;$$

se hanno orientazione opposta, allora

$$\int_\sigma \omega = -\int_{\tilde\sigma} \omega\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo una $M-$forma differenziale del tipo

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} .$$

Sia $\varphi : A \to B$, come nella definizione di $M-$superfici equivalenti, tale che $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \varphi$. Per il teorema di cambiamento di variabili nell'integrale, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \omega &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} \int_A f_{i_1,\ldots,i_M}(\tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))) \det(\tilde{\sigma} \circ \varphi)'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} \int_A f_{i_1,\ldots,i_M}(\tilde{\sigma}(\varphi(\boldsymbol{u}))) \det \tilde{\sigma}'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u})) \det \varphi'(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \\
&= \pm \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} \int_B f_{i_1,\ldots,i_M}(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v})) \det \tilde{\sigma}'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} \\
&= \pm \int_{\tilde{\sigma}} \omega ,
\end{aligned}$$

con segno positivo se $\det \varphi' > 0$, negativo se $\det \varphi' < 0$. ■

Nota. In generale, se σ e $\tilde{\sigma}$ sono equivalenti, non sempre si ha l'uguaglianza $|\int_\sigma \omega| = |\int_{\tilde{\sigma}} \omega|$. Non è detto infatti che esse abbiano la stessa orientazione od orientazione opposta. Ad esempio, se consideriamo le due superfici $\sigma, \tilde{\sigma} : [1,2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da

$$\begin{aligned}
&\sigma(u,v) = \\
&\left(\left(\frac{3}{2} + \left(u - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{v}{2} \right) \cos v, \left(\frac{3}{2} + \left(u - \frac{3}{2} \right) \cos \frac{v}{2} \right) \sin v, \left(u - \frac{3}{2} \right) \sin \frac{v}{2} \right), \\
&\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma\left(u, v + \frac{\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

si può vedere che sono entrambe parametrizzazioni dello stesso insieme (un nastro di Möbius) e pertanto sono equivalenti (il lettore è invitato ad esplicitare un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le proprietà della definizione). D'altra parte, se consideriamo la 2-forma differenziale $\omega(x_1, x_2, x_3) = dx_{12}$, determinata dal campo vettoriale costante $(0,0,1)$, facendo i conti si ottiene

$$\int_\sigma \omega = 0 , \quad \int_{\tilde{\sigma}} \omega = -3\sqrt{2} .$$

Consideriamo ora il caso importante in cui $M = N$.

Teorema. *Sia $M = N$; se σ è regolare e iniettiva su $\mathring{I}$ con $\det \sigma' > 0$ e ω è della forma*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N ,$$

allora $\int_\sigma \omega = \int_{\sigma(I)} f$.

Dimostrazione. Facendo uso del teorema del diffeomorfismo locale, si vede che σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$. Essendo trascurabili sia la frontiera di I che la sua l'immagine attraverso l'applicazione σ (vedi il lemma a p. 98) tenendo conto del teorema di cambiamento di variabili, avremo

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))\,d\boldsymbol{u} \\ &= \int_{\mathring{I}} f(\sigma(\boldsymbol{u}))\det(\sigma'(\boldsymbol{u}))\,d\boldsymbol{u} \\ &= \int_{\sigma(\mathring{I})} f = \int_{\sigma(I)} f\,.\end{aligned}$$

■

Se σ è la funzione identità, si ha che $\sigma(I) = I$ e al posto di $\int_\sigma \omega$ si userà scrivere $\int_I \omega$.

Vediamo il significato della definizione data quando $N = 3$. Se $M = 1$, $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva e ω è una 1-forma differenziale:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\,dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\,dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\,dx_3\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega &= \int_a^b [F_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) + F_2(\sigma(t))\sigma_2'(t) + F_3(\sigma(t))\sigma_3'(t)]\,dt \\ &= \int_a^b \langle F(\sigma(t))|\sigma'(t)\rangle\,dt\,.\end{aligned}$$

Questa quantità si chiama **integrale di linea** [2] del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ lungo la curva σ, e si indica con il simbolo

$$\int_\sigma \langle F|d\ell\rangle\,.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale di linea del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ lungo la curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Si ha:

$$\int_\sigma \langle F|d\ell\rangle = \int_0^{2\pi} [(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + t^2]\,dt = 2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\,.$$

---

[2] In meccanica si usa questo concetto, ad esempio, per definire il **lavoro** di una particella che descrive una curva in un campo di forze.

Se $M = 2$, $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ è una superficie e ω è una 2-forma differenziale:

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \,.$$

Si trova:

$$\begin{aligned}\int_\sigma \omega = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \Bigg[& F_1(\sigma(u,v)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} + \\ & + F_2(\sigma(u,v)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} + \\ & + F_3(\sigma(u,v)) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \Bigg] \, du\, dv \\ = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle du\, dv \,. \end{aligned}$$

Questa quantità si chiama **integrale di superficie** o **flusso** [3] del campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$ attraverso la superficie σ, e si indica con il simbolo

$$\int_\sigma \langle F | dS \rangle \,.$$

Esempio. Calcoliamo il flusso del campo $F(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ attraverso la superficie $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u, v) = (u^2, v, u + v)$. Si ha:

$$\int_\sigma \langle F | dS \rangle = \int_0^1 \int_0^1 [(-v)(-1) + u^2(-2u) + (u+v)^2(2u)]\, du\, dv = \frac{3}{2} \,.$$

8 Funzioni scalari e misura $M-$superficiale

Siano

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} \,,$$

una $M-$forma differenziale definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^N$, con $1 \le M \le N$, e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$, una $M-$superficie con supporto contenuto in U. Ricordiamo che

$$\int_\sigma \omega = \int_I \langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) | \Sigma(\boldsymbol{u}) \rangle \, d\boldsymbol{u} \,,$$

[3] In fluidodinamica si usa questo concetto, ad esempio, per definire la quantità di fluido che attraversa una superficie in un'unità di tempo.

dove

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{x}) &= (f_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x}))_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\ ,\\
\Sigma(\boldsymbol{u}) &= \Big(\det\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\ .
\end{aligned}
$$

Nelle applicazioni, oltre all'integrale di una $M-$forma differenziale, è utile definire l'integrale di una funzione scalare $f:U\to\mathbb{R}$ su di una $M-$superficie.

Definizione. *La funzione $f:U\to\mathbb{R}$ è integrabile sulla $M-$superficie $\sigma:I\to\mathbb{R}^N$ se $(f\circ\sigma)||\Sigma||$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$
\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))||\Sigma(\boldsymbol{u})||\,d\boldsymbol{u}\\
&= \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))\left[\sum_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\Big(\det\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)^2\right]^{1/2} d\boldsymbol{u}\,.
\end{aligned}
$$

In questo caso, l'integrale non differisce per $M-$superfici equivalenti.

Teorema. *Se σ e $\tilde\sigma$ sono due $M-$superfici equivalenti, si ha:*

$$
\int_\sigma f = \int_{\tilde\sigma} f\,.
$$

Dimostrazione. Con le notazioni introdotte in precedenza, essendo $\sigma(\boldsymbol{u})=\tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))$ con $\varphi:A\to B$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{u}) &= \Big(\det\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\Big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\\
&= \Big(\det\Big(\tilde\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\varphi'(\boldsymbol{u})\Big)\Big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\\
&= \Big(\det\tilde\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\Big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\det\varphi'(\boldsymbol{u})\\
&= \tilde\Sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))\det\varphi'(\boldsymbol{u})\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto, per il teorema di cambiamento di variabili, essendo $I\backslash A$ e $J\backslash B$ trascurabili, si ha:

$$
\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_A f(\sigma(\boldsymbol{u}))||\Sigma(\boldsymbol{u})||\,d\boldsymbol{u}\\
&= \int_A f(\tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u})))||\tilde\Sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))||\,|\det\varphi'(\boldsymbol{u})|\,d\boldsymbol{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_B f(\tilde{\sigma}(\boldsymbol{v}))||\tilde{\Sigma}(\boldsymbol{v})||\, d\boldsymbol{v} \\
&= \int_{\tilde{\sigma}} f\,.
\end{aligned}
$$

■

Nel caso $M = 1$, abbiamo una curva $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$\int_\sigma f = \int_a^b f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\, dt\,.$$

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in accordo con l'idea fisica del moto di una particella lungo un percorso descritto dalla funzione σ, in questo caso l'integrale di linea si chiama **lunghezza** [4] (o misura curvilinea) della curva σ, e si scrive:

$$\iota_1(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)||\, dt\,.$$

Esempio. Sia $\sigma : [0, b] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$. Il suo supporto è un arco di parabola, e la sua lunghezza è data da:

$$
\begin{aligned}
\iota_1(\sigma) &= \int_0^b \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt \\
&= \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(2b)} \frac{1}{2}(\cosh u)^2\, du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u + \sinh u \cosh u}{2}\right]_0^{\sinh^{-1}(2b)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sinh^{-1}(2b) + 2b\sqrt{1 + 4b^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2b + \sqrt{1 + 4b^2}\right) + \frac{b}{2}\sqrt{1 + 4b^2}\,.
\end{aligned}
$$

Se $M = 2$ e $N = 3$, abbiamo una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$\int_\sigma f = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(\sigma(u, v)) \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)\right\|\, du\, dv\,.$$

[4] Naturalmente questa definizione è anche giustificata da considerazioni geometriche, che preferiamo omettere per ragioni di brevità, sul concetto intuitivo che di solito si ha della lunghezza di un cammino.

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in questo caso si chiama **area** (o misura superficiale) della superficie σ il seguente integrale:

$$\iota_2(\sigma) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\| \, du \, dv \, .$$

Nel caso in cui la superficie risulti essere una 2-parametrizzazione di un certo insieme, questo integrale è il flusso di un campo di vettori che in ogni punto della superficie coincide con il versore normale. [5]

Esempio. Sia $\sigma : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R\cos\phi) \, .$$

Il suo supporto è una sfera di raggio R, e la sua area è data da:

$$\begin{aligned} \iota_2(\sigma) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{(R^2 \sin^2\phi \cos\theta)^2 + (R^2 \sin^2\phi \sin\theta)^2 + (R^2 \sin\phi\cos\theta)^2} \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 4\pi R^2 \, . \end{aligned}$$

In generale, nel caso in cui f è costantemente uguale a 1 abbiamo

$$\int_\sigma 1 = \int_I ||\Sigma(\boldsymbol{u})|| \, d\boldsymbol{u} \, ,$$

il che ci porta alla seguente

Definizione. *Si dice* **misura** $M-$**superficiale** *di una* $M-$*superficie* $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ *il seguente integrale:*

$$\iota_M(\sigma) = \int_I \left[\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_M \le N} \Big(\det \sigma'_{(i_1,\ldots,i_M)}(\boldsymbol{u}) \Big)^2 \right]^{1/2} d\boldsymbol{u} \, .$$

Come ragionevolmente ci si aspetta, dall'ultimo teorema dimostrato segue immediatamente che due $M-$superfici equivalenti hanno sempre la stessa misura $M-$superficiale.

Esempio. Le due curve $\sigma, \tilde\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \, , \quad \tilde\sigma(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \, ,$$

pur avendo lo stesso supporto, non sono equivalenti. Infatti, come facilmente si vede, $\iota_1(\sigma) = 2\pi$ mentre $\iota_1(\tilde\sigma) = 4\pi$.

[5] Naturalmente anche la definizione di area può essere giustificata da considerazioni geometriche, anche se la questione risulta molto più delicata che nel caso delle curve.

Alla luce di quanto sopra, è possibile dare la seguente

Definizione. *Si chiama* **misura** $M-$**dimensionale** *di un insieme* $M-$*parametrizzabile* $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ *la misura* $M-$*superficiale di una qualunque sua* $M-$*parametrizzazione.*

Nei casi $M = 1, 2$, la misura $M-$dimensionale di $\mathcal{M}$ si chiama spesso **lunghezza** o **area** di $\mathcal{M}$, rispettivamente. Si potrà parlare, ad esempio, di lunghezza di una circonferenza e di area di una sfera.

Se $M = N$, si può verificare che la misura $N-$dimensionale dell'insieme $\mathcal{M}$ coincide con la misura usuale che abbiamo trattato nel capitolo 2.

9 Incollamenti: il bordo orientato di un rettangolo

Supponiamo che $\sigma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$,..., $\sigma_n : I_n \to \mathbb{R}^N$ siano delle $M-$superfici. Possiamo facilmente trovare delle $M-$superfici equivalenti $\tilde{\sigma}_1 : J_1 \to \mathbb{R}^N$,..., $\tilde{\sigma}_n : J_n \to \mathbb{R}^N$, con la stessa orientazione, in modo tale che i rettangoli $J_1, ..., J_n$ siano a due a due non sovrapposti e la loro unione risulti essere un rettangolo I.

Definizione. *Chiameremo* **incollamento** *delle $M-$superfici σ_1, ..., σ_n una funzione $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ la cui restrizione a $\mathring{J}_1, ..., \mathring{J}_n$ coincide con $\tilde{\sigma}_1$, ..., $\tilde{\sigma}_n$, rispettivamente; essa è differenziabile quasi ovunque, e possiamo definire $\int_\sigma \omega$ per mezzo della stessa formula usata per le $M-$superfici di classe C^1. Quindi:*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\sigma_1} \omega + ... + \int_{\sigma_n} \omega \, .$$

Abbiamo così "incollato" le $M-$superfici $\sigma_1, ..., \sigma_n$ e definito un integrale che non dipende dalla scelta delle $M-$superfici equivalenti, poiché esse conservano l'orientazione. Nella pratica non sarà mai necessario definire esplicitamente l'incollamento, ma ci sarà indispensabile la formula per l'integrale.

Supponiamo ora che I sia un rettangolo in $\mathbb{R}^{M+1}$, con $M \geq 1$:

$$I = [a_1, b_1] \times ... \times [a_{M+1}, b_{M+1}] \, .$$

Denotiamo con I_k il rettangolo di $\mathbb{R}^M$ ottenuto da I sopprimendo la $k-$esima componente:

$$I_k = [a_1, b_1] \times ... \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times ... \times [a_{M+1}, b_{M+1}] \, .$$

Consideriamo, per ogni k, le $M-$superfici $\alpha_k^+, \beta_k^+ : I_k \to \mathbb{R}^{M+1}$ definite da

$$\begin{aligned} \alpha_k^+(u_1, ..., \widehat{u_k}, .., u_{M+1}) &= (u_1, ..., u_{k-1}, a_k, u_{k+1}, ..., u_{M+1}) \, , \\ \beta_k^+(u_1, ..., \widehat{u_k}, .., u_{M+1}) &= (u_1, ..., u_{k-1}, b_k, u_{k+1}, ..., u_{M+1}) \, , \end{aligned}$$

dove il simbolo $\widehat{\ }$ sta ad indicare la soppressione della variabile sottostante. Consideriamo inoltre delle $M-$superfici $\alpha_k^-, \beta_k^- : I_k \to \mathbb{R}^{M+1}$, equivalenti a α_k^+ e β_k^+, rispettivamente, con orientazione opposta. (Stiamo qui considerando la situazione in cui $N = M + 1$.)

Definizione. *Chiamiamo* **bordo orientato** *del rettangolo I una funzione ∂I incollamento delle seguenti $M-$superfici:*
(a) α_k^- e β_k^+ se k è dispari;
(b) α_k^+ e β_k^- se k è pari.

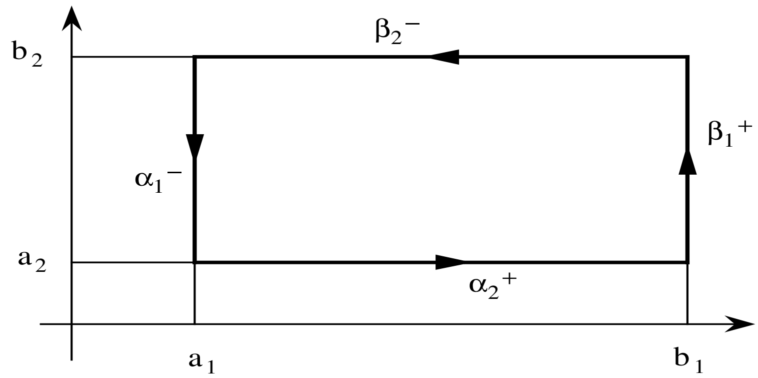
Se ω è una $M-$forma differenziale definita su un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^{M+1}$ contenente l'immagine di ∂I, avremo quindi:

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega \,.$$

Se $M = 1$, consideriamo il rettangolo $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Allora, ad esempio:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad v \mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v) \\
\beta_1^+ &: [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad v \mapsto (b_1, v) \\
\alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad u \mapsto (u, a_2) \\
\beta_2^- &: [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^2 \,, \quad u \mapsto (a_1 + b_1 - u, b_2) \,.
\end{aligned}$$

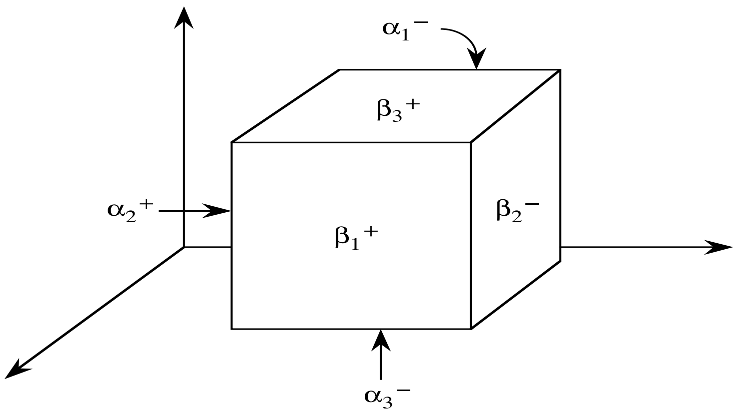
Si può visualizzare il bordo orientato ∂I come incollamento dei lati del rettangolo I orientati in modo che il perimetro sia percorso in senso antiorario.



Se $M = 2$, abbiamo, ad esempio:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^- &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (v, w) \mapsto (a_1, a_2 + b_2 - v, w) \\
\beta_1^+ &: [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (v, w) \mapsto (b_1, v, w) \\
\alpha_2^+ &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, w) \mapsto (u, a_2, w) \\
\beta_2^- &: [a_1, b_1] \times [a_3, b_3] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, w) \mapsto (u, b_2, a_3 + b_3 - w) \\
\alpha_3^- &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, v) \mapsto (a_1 + b_1 - u, v, a_3) \\
\beta_3^+ &: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3 \,, \quad (u, v) \mapsto (u, v, b_3) \,.
\end{aligned}$$

In questo caso, si può visualizzare il bordo orientato ∂I come incollamento delle sei facce del parallelepipedo I, tutte orientate in modo tale che il vettore normale sia sempre rivolto verso l'esterno.



10 La formula di Gauss

In questa sezione, I sarà un rettangolo di $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$ (quindi, rispetto alla sezione precedente, considereremo il caso $N = M + 1$). Nel teorema che segue, si ottiene l'elegante **formula di Gauss**.

Teorema. *Se ω è una $(N-1)-$forma differenziale di classe C^1 definita su un aperto contenente un rettangolo I di $\mathbb{R}^N$, si ha:*

$$\int_I d\omega = \int_{\partial I} \omega \,.$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere ω nella forma

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{N} F_j(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_N \,.$$

Allora

$$\begin{aligned} d\omega(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m \wedge dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_N \\ &= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge ... \wedge dx_N \,. \end{aligned}$$

Essendo le derivate parziali delle F_j continue, esse sono integrabili sull'intervallo I, e possiamo usare la formula di riduzione di Fubini:

$$\int_I d\omega = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \int_I \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\, dx_1 ... dx_N$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \int_{I_j} \left(\int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x_1, ..., x_N)\, dx_j \right) dx_1 ... \widehat{dx_j} ... dx_N$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \int_{I_j} [F_j(x_1, ..., x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, ..., x_N) -$$

$$- F_j(x_1, ..., x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, ..., x_N)]\, dx_1 ... \widehat{dx_j} ... dx_N \,,$$

per il teorema fondamentale. D'altra parte,

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} \omega \,.$$

Si ha:

$$\int_{\alpha_k^+} \omega = \sum_{j=1}^{N} \int_{\alpha_k^+} F_j \, dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_N$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{I_k} (F_j \circ \alpha_k^+) \det(\alpha_k^+)'_{(1,...,\hat{j},...,N)}\, dx_1 ... \widehat{dx_k} ... dx_N$$

$$= \int_{I_k} F_k(x_1, ..., x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, ..., x_N)\, dx_1 ... \widehat{dx_k} ... dx_N \,,$$

essendo

$$\det(\alpha_k^+)'_{(1,...,\hat{j},...,N)} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \,, \\ 1 & \text{se } j = k \,. \end{cases}$$

Procedendo similmente per β_k^+, alla fine si ottiene:

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \int_{I_k} [F_k(x_1, ..., x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, ..., x_N)$$

$$- F_k(x_1, ..., x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, ..., x_N)]\, dx_1 ... \widehat{dx_k} ... dx_N \,,$$

e la dimostrazione è completa. ■

11 Bordo orientato di una $M-$superficie

In questa sezione, I sarà un rettangolo di $\mathbb{R}^{M+1}$ e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ una $(M+1)-$superficie.

Definizione. *Se* $1 \leq M \leq N-1$, *chiameremo* **bordo orientato** *di* σ *la funzione* $\partial\sigma = \sigma \circ \partial I$, *che risulta essere un incollamento delle seguenti* $M-$*superfici:*
(a) $\sigma \circ \alpha_k^-$ *e* $\sigma \circ \beta_k^+$ *se* k *è dispari;*
(b) $\sigma \circ \alpha_k^+$ *e* $\sigma \circ \beta_k^-$ *se* k *è pari.*

Data una $M-$forma differenziale ω il cui dominio contiene il supporto di $\partial\sigma$, avremo quindi

$$\int_{\partial\sigma} \omega = \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\sigma\circ\beta_k^+} \omega \,.$$

Nota. È utile estendere la scrittura $\int_{\partial\sigma}\omega$ nel caso in cui $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ sia una curva, con $N \geq 1$, e $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ una 0-forma differenziale; in questo caso, si pone:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \,.$$

Esempi. Come illustrazione, consideriamo come al solito il caso $N = 3$. Cominciamo con tre esempi di bordo orientato di superfici.

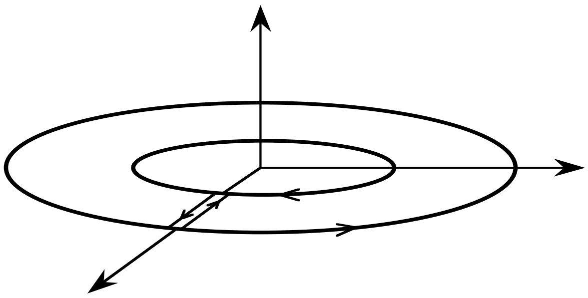
1. Sia $\sigma : [r,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 \leq r < R$, data da

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0) \,.$$

Il suo supporto è un cerchio se $r = 0$, una corona circolare se $r > 0$. Il bordo orientato $\partial\sigma$ è dato dall'incollamento delle seguenti quattro curve:

$$\begin{aligned} \sigma\circ\alpha_1^-(v) &= (r\cos v, -r\sin v, 0) \,, \\ \sigma\circ\beta_1^+(v) &= (R\cos v, R\sin v, 0) \,, \\ \sigma\circ\alpha_2^+(u) &= (u, 0, 0) \,, \\ \sigma\circ\beta_2^-(u) &= (r + R - u, 0, 0) \,. \end{aligned}$$

La prima curva ha come supporto una circonferenza di raggio r, che degenera nell'origine nel caso in cui $r = 0$. La seconda ha come supporto una circonferenza di raggio R. Si noti però che il verso di percorrenza di queste due circonferenze è opposto. Le ultime due curve sono equivalenti con orientazioni opposte.

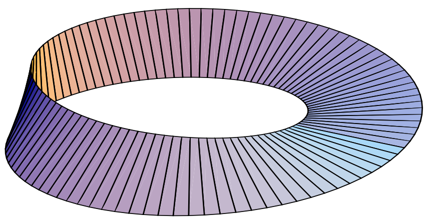


Sia ora dato, per esempio, il campo vettoriale $F(x,y,z) = (-y, x, xye^z)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\sigma} \langle F|d\ell\rangle &= \int_{\sigma\circ\alpha_1^-} \langle F|d\ell\rangle + \int_{\sigma\circ\beta_1^+} \langle F|d\ell\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} [-r^2\sin^2 v - r^2\cos^2 v]\, dv + \int_0^{2\pi} [R^2\sin^2 v + R^2\cos^2 v]\, dv \\ &= 2\pi(R^2 - r^2) \,. \end{aligned}$$

2. Consideriamo la superficie $\sigma : [r, R] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 < r < R$, definita da

$$\begin{aligned}\sigma(u,v) = \Bigg(&\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &\left(\frac{r+R}{2} + \left(u - \frac{r+R}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &\left(u - \frac{r+R}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg),\end{aligned}$$



il cui supporto è un nastro di Möbius. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(v) &= \Bigg(\left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &\qquad -\left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &\qquad -\frac{R-r}{2}\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg),\\ \sigma \circ \beta_1^+(v) &= \Bigg(\left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos v,\\ &\qquad \left(\frac{r+R}{2} + \frac{R-r}{2}\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin v,\\ &\qquad \frac{R-r}{2}\sin\left(\frac{v}{2}\right)\Bigg),\\ \sigma \circ \alpha_2^+(u) &= (u, 0, 0)\,,\\ \sigma \circ \beta_2^-(u) &= (u, 0, 0)\,.\end{aligned}$$

Si noti che in questo caso le ultime due curve sono identiche.

3. Consideriamo la superficie $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\,,$$

il cui supporto è la sfera di raggio $R > 0$ centrata nell'origine. In questo caso, il bordo orientato è dato dall'incollamento di:

$$\begin{aligned}\sigma \circ \alpha_1^-(\theta) &= (0, 0, R)\,,\\ \sigma \circ \beta_1^+(\theta) &= (0, 0, -R)\,,\end{aligned}$$

$$\sigma \circ \alpha_2^+(\phi) = (R\sin\phi, 0, R\cos\phi)\,,$$
$$\sigma \circ \beta_2^-(\phi) = (R\sin\phi, 0, -R\cos\phi)\,.$$

Si noti che le prime due curve sono degenerate in un punto, mentre le ultime due sono equivalenti con orientazioni opposte. Quindi, qualsiasi sia il campo vettoriale F, si avrà $\int_{\partial\sigma} \langle F|d\ell\rangle = 0$.

Vediamo ora un esempio di bordo orientato di un volume in $\mathbb{R}^3$. Sia $\sigma : [0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ il volume definito da

$$\sigma(\rho,\phi,\theta) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,,$$

il cui supporto è la palla, centrata nell'origine, di raggio $R > 0$. Il bordo orientato $\partial\sigma$ è dato dall'incollamento delle seguenti sei superfici:

$$\begin{aligned}
\sigma \circ \alpha_1^-(\phi,\theta) &= (0,0,0)\,,\\
\sigma \circ \beta_1^+(\phi,\theta) &= (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\,,\\
\sigma \circ \alpha_2^+(\rho,\theta) &= (0,0,\rho)\,,\\
\sigma \circ \beta_2^-(\rho,\theta) &= (0,0,-\rho)\,,\\
\sigma \circ \alpha_3^-(\rho,\phi) &= ((R-\rho)\sin\phi, 0, (R-\rho)\cos\phi)\,,\\
\sigma \circ \beta_3^+(\rho,\phi) &= (\rho\sin\phi, 0, \rho\cos\phi)\,.
\end{aligned}$$

Si noti che la prima superficie è degenerata in un punto (l'origine), la seconda ha come supporto la sfera intera, la terza e la quarta sono degenerate in due curve mentre le rimanenti due sono equivalenti con orientazioni opposte. In questo esempio, quindi, dato un campo vettoriale F, si avrà sempre

$$\int_{\partial\sigma} \langle F|dS\rangle = \int_{\sigma\circ\beta_1^+} \langle F|dS\rangle\,.$$

12 La formula di Stokes - Cartan

Enunciamo la seguente generalizzazione del teorema di Gauss, in cui si ottiene l'importante **formula di Stokes - Cartan**.

Teorema. *Sia $0 \le M \le N-1$. Se $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è una $M-$forma differenziale di classe C^1 e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ una $(M+1)-$superficie il cui supporto è contenuto in U, si ha:*

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega\,.$$

Si noti che il caso $M = 0$, $N = 1$ e $\sigma(u) = u$ è una versione del teorema fondamentale, anche se qui si richiede che la derivata di ω sia continua.

La dimostrazione generale del teorema di Stokes-Cartan è data nell'appendice 2. Ci limiteremo qui a considerare alcuni corollari che si ottengono, nel caso $N = 3$, quando M assume i valori 0, 1 e 2. È interessante dimostrare direttamente questi corollari, adattando la dimostrazione generale a questi casi particolari.

Il caso $M = 0$. Consideriamo una 0-forma differenziale $f : U \to \mathbb{R}$ e otteniamo il seguente

Teorema. *Sia $\omega = f : U \to \mathbb{R}$ una funzione scalare di classe C^1 e $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva con supporto contenuto in U. Allora:*

$$\int_\sigma \langle \operatorname{grad} f | d\ell \rangle = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $G(t) = f(\sigma(t))$. Essa è di classe C^1, e per il teorema fondamentale si ha

$$\int_a^b G'(t)\,dt = G(b) - G(a)\,.$$

Siccome $G'(t) = \langle \operatorname{grad} f(\sigma(t)) | \sigma'(t) \rangle$, ne segue la formula cercata. ■

Nota. L'integrale di linea del gradiente di una funzione f non dipende dalla curva scelta, ma soltanto dal valore della funzione nei due estremi $\sigma(b)$ e $\sigma(a)$.

Esempio. Siano dati il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = -\left(\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \frac{y}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}, \frac{z}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} \right)$$

e la curva $\sigma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Vogliamo calcolare l'integrale di linea $\int_\sigma \langle F | d\ell \rangle$. Osserviamo che $F = \operatorname{grad} f$, con

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

e quindi:

$$\int_\sigma \langle F | d\ell \rangle = f(\sigma(4\pi)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{\sqrt{1+16\pi^2}} - 1\,.$$

Il caso $M = 1$. Consideriamo una 1-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\,dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\,dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\,dx_3$$

e otteniamo la **formula di Stokes-Ampère**.

Teorema. *Sia $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori di classe C^1 e $\sigma : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$ una superficie con supporto contenuto in U. Si ha:*

$$\int_\sigma \langle \operatorname{rot} F | dS \rangle = \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle\,.$$

A parole. *Il flusso del rotore del campo F attraverso la superficie σ coincide con l'integrale di linea di F lungo il bordo di σ.*

Dimostrazione. Posto $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, definiamo la seguente 1-forma differenziale $\tilde{\omega} : I \to \Omega_1(\mathbb{R}^2)$:

$$\tilde{\omega}(u,v) = \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \right\rangle du + \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle dv\,.$$

Iniziamo a valutare il suo integrale su α_1^- :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1^-} \tilde{\omega} &= \int_{a_2}^{b_2} \left\langle F(\sigma(a_1, a_2 + b_2 - v)) \middle| -\frac{\partial \sigma}{\partial v}(a_1, a_2 + b_2 - v) \right\rangle dv \\ &= \int_{\sigma \circ \alpha_1^-} \langle F | d\ell \rangle\,.\end{aligned}$$

Si verificano poi le analoghe uguaglianze per l'integrale su β_1^+, α_2^+ e β_2^-, per cui si ha che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} \langle F | d\ell \rangle\,.$$

Supponiamo ora che σ sia di classe C^2. Allora $\tilde{\omega}$ è di classe C^1 e, con un po' di conti, si trova:

$$\begin{aligned}&d\tilde{\omega}(u,v) = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \right\rangle \right] du \wedge dv \\ &= \left\langle \operatorname{rot} F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle du \wedge dv\,,\end{aligned}$$

per cui

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_\sigma \langle \operatorname{rot} F | dS \rangle\,.$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere.

L'ipotesi che σ sia di classe C^2 può infine essere tolta con un procedimento di approssimazione: è possibile costruire una successione $(\sigma_n)_n$ di superfici di classe C^2 che convergono a σ assieme a tutte le derivate parziali. La formula di Stokes-Ampère vale quindi per tali superfici e, passando al limite, per il teorema della convergenza dominata, abbiamo la conclusione. ■

Esempio. Sia $F(x,y,z) = (-y,x,0)$ e $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$; vogliamo calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma \langle F|d\ell\rangle$. Abbiamo già visto come calcolare questo integrale facendo uso diretto della definizione. Procediamo ora in un altro modo: definiamo la superficie $\sigma : [0,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da $\sigma(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$. Osserviamo che $\gamma = \sigma \circ \beta_1^+$, per cui si ha:

$$\int_\gamma \langle F|d\ell\rangle = \int_{\sigma\circ\beta_1^+} \langle F|d\ell\rangle = \int_{\partial\sigma} \langle F|d\ell\rangle = \int_\sigma \langle \operatorname{rot} F|dS\rangle \,.$$

Osserviamo che $\operatorname{rot} F(x,y,z) = (0,0,2)$ e

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\rho}(\rho,\theta) \times \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\rho,\theta) = (0,0,\rho) \,.$$

Ne segue che

$$\int_\gamma \langle F|d\ell\rangle = \int_0^R \int_0^{2\pi} \langle (0,0,2)|(0,0,\rho)\rangle \, d\theta \, d\rho = 2\pi R^2 \,.$$

<u>Il caso $M = 2$</u>. Consideriamo una 2-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2$$

e otteniamo la **formula di Stokes-Ostrogradski**.

Teorema. *Sia $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori di classe C^1 e supponiamo che $\sigma : I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \to \mathbb{R}^3$ sia regolare e iniettiva su $\mathring{I}$ con* $\det\sigma' > 0$, *e $\sigma(I) \subset U$. Allora:*

$$\int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F = \int_{\partial\sigma} \langle F|dS\rangle \,.$$

In termini intuitivi. *L'integrale della divergenza del campo F sull'insieme $V = \sigma(I)$ coincide con il flusso di F uscente da V.*

Dimostrazione. Consideriamo la seguente 2-forma differenziale $\tilde\omega : I \to \Omega_2(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}\tilde\omega(\boldsymbol{u}) = & \left\langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}) \right.\right\rangle du_2 \wedge du_3 + \\ & + \left\langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) \right.\right\rangle du_3 \wedge du_1 + \\ & + \left\langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial\sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \right.\right\rangle du_1 \wedge du_2\end{aligned}$$

Considerata la superficie β_1^+, si ha:

$$\int_{\beta_1^+} \tilde\omega =$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \left\langle F(b_1, u_2, u_3) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(b_1, u_2, u_3) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(b_1, u_2, u_3) \right. \right\rangle du_2 \, du_3$$
$$= \int_{\beta_1^+} \langle F | dS \rangle \,.$$

Calcolando analogamente gli integrali sulle altre cinque superfici che compongono ∂I, si conclude che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial \sigma} \langle F | dS \rangle \,.$$

Supponiamo ora che σ sia di classe C^2. Allora $\tilde{\omega}$ è di classe C^1 e, facendo i conti, con un po' di pazienza si ha:

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(\boldsymbol{u}) = & \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left\langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}) \right. \right\rangle + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial u_2} \left\langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) \right. \right\rangle + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left\langle F(\sigma(\boldsymbol{u})) \left| \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) \times \frac{\partial \sigma}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}) \right. \right\rangle \right] du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \\ = & \operatorname{div} F(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'(\boldsymbol{u}) \, du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \,. \end{aligned}$$

Quindi, si ha:

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \operatorname{div} F(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'(\boldsymbol{u}) \, d\boldsymbol{u} \,.$$

D'altra parte, siccome σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$ con $\det \sigma' > 0$, per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I \operatorname{div} F(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'(\boldsymbol{u}) \, d\boldsymbol{u} = \int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \,.$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere.

L'ipotesi che σ sia di classe C^2 può infine essere tolta con un procedimento di approssimazione, come nel teorema precedente. ■

Esempio. Si voglia calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = ([x^2 + y^2 + z^2]x, [x^2 + y^2 + z^2]y, [x^2 + y^2 + z^2]z)$$

attraverso una superficie sferica parametrizzata da $\eta : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$\eta(\phi, \theta) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \,.$$

Ci ricordiamo che $\eta = \sigma \circ \beta_1^+$, dove $\sigma : I = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è il volume dato da

$$\sigma(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi) .$$

Abbiamo quindi:

$$\int_\eta \langle F | dS \rangle = \int_{\partial\sigma} \langle F | dS \rangle = \int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F .$$

Essendo $\operatorname{div} F(x, y, z) = 5(x^2 + y^2 + z^2)$, passando a coordinate sferiche si ha:

$$\int_{\sigma(I)} \operatorname{div} F = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} (5\rho^2)(\rho^2 \sin\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 4\pi R^5 .$$

13 Risultati analoghi in $\mathbb{R}^2$

Supponiamo che U sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e troviamo due interessanti corollari del teorema di Stokes-Cartan. Analogamente al caso $N = 3$, si definisce l'integrale di linea di un campo di vettori $F = (F_1, F_2)$ lungo una curva $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$:

$$\int_\sigma \langle F | d\ell \rangle = \int_a^b [F_1(\sigma(t))\sigma_1'(t) + F_2(\sigma(t))\sigma_2'(t)]\, dt .$$

Abbiamo il seguente risultato, analogo a quello ottenuto nella sezione precedente nel caso $N = 3$.

Teorema. *Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione scalare di classe C^1 e $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva con immagine contenuta in U. Allora:*

$$\int_\sigma \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \middle| d\ell \right\rangle = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) .$$

Prendendo invece $M = 2$, otteniamo la **formula di Gauss-Green**.

Teorema. *Sia $F = (F_1, F_2) : U \to \mathbb{R}^2$ un campo di vettori di classe C^1 e supponiamo che la superficie $\sigma : I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^2$ sia regolare e iniettiva su $\mathring{I}$ con $\det \sigma' > 0$, e $\sigma(I) \subset U$. Allora:*

$$\int_{\sigma(I)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle .$$

Dimostrazione. Similmente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema di Stokes-Ampère, consideriamo la forma differenziale ausiliaria $\tilde{\omega} : I \to \Omega_1(\mathbb{R}^2)$ definita da

$$\tilde{\omega}(u,v) = \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \right\rangle du + \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle dv$$

e verifichiamo che

$$\int_{\partial I} \tilde{\omega} = \int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle \,.$$

Se σ è di classe C^2, allora $\tilde{\omega}$ è di classe C^1 e, facendo i conti, si trova

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(u,v) &= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) \right\rangle - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle F(\sigma(u,v)) \middle| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \right\rangle \right] du \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u,v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u,v)) \right) \det\sigma'(u,v) du \wedge dv \,. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_I \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\sigma(u,v)) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\sigma(u,v)) \right) \det\sigma'(u,v) du\, dv \,,$$

e siccome σ induce un diffeomorfismo tra $\mathring{I}$ e $\sigma(\mathring{I})$ con $\det\sigma' > 0$, per il teorema di cambiamento di variabili

$$\int_I d\tilde{\omega} = \int_{\sigma(I)} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

La formula di Gauss applicata a $\tilde{\omega}$ permette quindi di concludere.

Analogamente a quanto visto nel caso $N = 3$, si può ora togliere l'ipotesi che σ sia di classe C^2 con un procedimento di approssimazione. ■

Esempio. Consideriamo la superficie $\sigma : I = [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\sigma(\rho,\theta) = (A\rho\cos\theta, B\rho\sin\theta)$, il cui supporto è una superficie ellittica avente semiassi di lunghezza $A > 0$ e $B > 0$. Si prenda il campo di vettori $F(x,y) = (-y, x)$. Essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2$$

e (come nel caso del cerchio)

$$\int_{\partial\sigma} \langle F | d\ell \rangle = \int_{\sigma\circ\beta_1^+} \langle F | d\ell \rangle \,,$$

la formula di Gauss-Green ci da:

$$\int_{\sigma(I)} 2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \langle (-B\sin\theta, A\cos\theta) | (-A\sin\theta, B\cos\theta) \rangle\, d\theta = 2\pi AB.$$

Se ne ricava l'area della superficie ellittica: $\mu(\sigma(I)) = \pi AB$.

14 Forme differenziali esatte

Ci interessiamo ora al problema di trovare in quali casi una forma differenziale data possa essere scritta come il differenziale esterno di una forma differenziale da determinarsi. In questa sezione, supporremo $M \geq 1$.

Definizione. *Una* $M-$*forma differenziale* ω *si dice* **chiusa** *se* $d\omega = 0$; *si dice* **esatta** *se esiste una* $(M-1)-$*forma differenziale* $\tilde{\omega}$ *tale che* $d\tilde{\omega} = \omega$.

Ogni forma differenziale esatta è chiusa: se $\omega = d\tilde{\omega}$, allora $d\omega = d(d\tilde{\omega}) = 0$. Il viceversa non sempre è vero.

Esempio. La 1-forma differenziale definita su $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ da

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

è chiusa, come facilmente si verifica: ponendo

$$F_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$, si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\,.$$

Calcoliamo l'integrale di linea del campo di vettori $F = (F_1, F_2)$ che determina la forma differenziale sulla curva $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$:

$$\begin{aligned} \int_\sigma \langle F | d\ell \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(t) | \sigma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t) | (-\sin t, \cos t) \rangle\, dt \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

Supponiamo per assurdo che ω sia esatta, cioè che esista una funzione $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$. In tal caso, essendo $\sigma(0) = \sigma(2\pi)$, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \int_\sigma \langle F | d\ell \rangle &= \int_\sigma \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \middle| d\ell \right\rangle \\ &= f(\sigma(2\pi)) - f(\sigma(0)) = 0\,, \end{aligned}$$

in contraddizione con quanto sopra.

La situazione descritta nell'esempio precedente non può verificarsi se, ad esempio, l'insieme U su cui è definita la forma differenziale è un aperto stellato rispetto ad un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$, cioè contiene, per ogni suo punto $\boldsymbol{x}$, tutto il segmento che congiunge $\boldsymbol{x}$ a $\bar{\boldsymbol{x}}$. Vale infatti il seguente **teorema di Poincaré**:

Teorema. *Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ stellato rispetto ad un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$. Per $1 \leq M \leq N$, una $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ di classe C^1 è esatta se e solo se essa è chiusa. In tal caso, se ω è del tipo*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_M \leq N} f_{i_1,\ldots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} \,,$$

una $(M-1)-$forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$ è data da

$$\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_M \leq N} \sum_{s=1}^{M} (-1)^{s+1} (x_{i_s} - \bar{x}_{i_s}) \cdot$$
$$\cdot \left(\int_0^1 t^{M-1} f_{i_1,\ldots,i_M}(\bar{\boldsymbol{x}} + t(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}))\, dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} \,.$$

La dimostrazione generale di questo teorema verrà data nell'appendice 2. Come nel caso del teorema di Stokes-Cartan, considereremo qui solo alcuni corollari che si ottengono nel caso $N = 3$, fornendone anche una dimostrazione diretta. Per semplificare la scrittura, supporremo senza perdita di generalità $\bar{\boldsymbol{x}} = (0, 0, 0)$.

Il caso $M = 1$. Un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, di classe C^1, definito su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$, determina una 1-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x})\, dx_1 + F_2(\boldsymbol{x})\, dx_2 + F_3(\boldsymbol{x})\, dx_3 \,.$$

Essa è chiusa se e solo se $\operatorname{rot} F = 0$. In questo caso, il campo di vettori si dice **irrotazionale**. Diremo invece che il campo di vettori F è **conservativo** se esiste una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $F = \operatorname{grad} f$. In tal caso f si dice un **potenziale scalare** del campo F. [6]

Teorema. *Se U è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori $F : U \to \mathbb{R}^3$ è conservativo se e solo se esso è irrotazionale, e in tal caso una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ tale che $F = \operatorname{grad} f$ è data da:*

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 \langle F(t\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \rangle \, dt \,.$$

Ogni altra funzione $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}$ tale che $F = \operatorname{grad} \tilde{f}$ si ottiene da f aggiungendo una costante.

---

[6] In meccanica spesso è la funzione $-f$ a chiamarsi "potenziale".

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{\omega} = f : U \to \mathbb{R}$. Verifichiamo che $d\tilde{\omega} = \omega$. Usando la regola di Leibniz, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \langle F(t\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \rangle \, dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\boldsymbol{x}) t x_i \right) + F_j(t\boldsymbol{x}) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\boldsymbol{x}) t x_i \right) + F_j(t\boldsymbol{x}) \right) dt \,.
\end{aligned}
$$

Definendo $\phi(t) = tF_j(t\boldsymbol{x})$, si ha che

$$
\phi'(t) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\boldsymbol{x}) t x_i \right) + F_j(t\boldsymbol{x}) \,,
$$

e per il teorema fondamentale si ha quindi:

$$
\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = F_j(\boldsymbol{x}) \,,
$$

il che dimostra che $F = \operatorname{grad} f$. La seconda parte del teorema segue dal fatto che, se $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} \tilde{f}$, allora $f - \tilde{f}$ deve essere costante su U. ■

Esempio. Consideriamo il campo di vettori $F(x,y,z) = (2xz + y, x, x^2)$ che, come si verifica facilmente, è irrotazionale. Si trova:

$$
f(x,y,z) = \int_0^1 ((2t^2x^2z + txy) + txy + t^2x^2z) \, dt = xy + x^2z \,.
$$

Il caso $M = 2$. Un campo di vettori $F = (F_1, F_2, F_3)$, di classe C^1, definito su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$, determina una 2-forma differenziale

$$
\omega(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}) \, dx_2 \wedge dx_3 + F_2(\boldsymbol{x}) \, dx_3 \wedge dx_1 + F_3(\boldsymbol{x}) \, dx_1 \wedge dx_2 \,.
$$

Essa è chiusa se e solo se $\operatorname{div} F = 0$. In questo caso, il campo di vettori si dice **solenoidale**. Si dice che F ha un **potenziale vettore** se esiste un campo di vettori $V = (V_1, V_2, V_3)$ tale che $F = \operatorname{rot} V$.

Teorema. *Se U è stellato rispetto all'origine, si ha che il campo di vettori $F : U \to \mathbb{R}^3$ ha un potenziale vettore se e solo se esso è solenoidale, e in tal caso un campo di vettori $V : U \to \mathbb{R}^3$ tale che $F = \operatorname{rot} V$ è dato da:*

$$
V(\boldsymbol{x}) = \Big(\int_0^1 t(F_2(t\boldsymbol{x})x_3 - F_3(t\boldsymbol{x})x_2) \, dt \,,
$$

$$\int_0^1 t(F_3(t\boldsymbol{x})x_1 - F_1(t\boldsymbol{x})x_3)\,dt\,,$$
$$\left.\int_0^1 t(F_1(t\boldsymbol{x})x_2 - F_2(t\boldsymbol{x})x_1)\,dt\right)\,,$$

che scriveremo brevemente

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^1 t(F(t\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{x})\,dt\,.$$

Ogni altro campo di vettori $\tilde{V} : U \to \mathbb{R}^3$ *tale che* $F = \operatorname{rot}\tilde{V}$ *si ottiene da* V *aggiungendo il gradiente di una qualsiasi funzione scalare.*

Dimostrazione. Consideriamo la 1-forma differenziale determinata dal campo V :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = &\left(\int_0^1 t(F_2(t\boldsymbol{x})x_3 - F_3(t\boldsymbol{x})x_2)\,dt\right) dx_1 + \\ &+\left(\int_0^1 t(F_3(t\boldsymbol{x})x_1 - F_1(t\boldsymbol{x})x_3)\,dt\right) dx_2 + \\ &+\left(\int_0^1 t(F_1(t\boldsymbol{x})x_2 - F_2(t\boldsymbol{x})x_1)\,dt\right) dx_3\,.\end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che $d\tilde{\omega} = \omega$. Per la regola di Leibniz, tenuto conto del fatto che ω è chiusa, troviamo:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^1 t(F_1(t\boldsymbol{x})x_2 - F_2(t\boldsymbol{x})x_1)\,dt - \\ &\qquad -\frac{\partial}{\partial x_3}\int_0^1 t(F_3(t\boldsymbol{x})x_1 - F_1(t\boldsymbol{x})x_3)\,dt = \\ &= \int_0^1 \left(t^2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t\boldsymbol{x})x_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t\boldsymbol{x})x_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(t\boldsymbol{x})x_3\right) + 2tF_1(t\boldsymbol{x})\right) dt \\ &= F_1(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

(applicando il teorema fondamentale alla funzione $\phi(t) = t^2 F_1(t\boldsymbol{x})$). Analogamente si dimostrano le rimanenti due uguaglianze, concludendo la dimostrazione della formula. La seconda parte del teorema segue dal fatto che, se $\operatorname{rot} V = \operatorname{rot}\tilde{V}$, allora, per il teorema precedente, $V - \tilde{V}$ è un campo di vettori conservativo. ■

Esempio. Consideriamo il campo di vettori solenoidale $F(x, y, z) = (y, z, x)$. Si ha:

$$V(x, y, z) = \int_0^1 t(ty, tz, tx) \times (x, y, z)\,dt = \frac{1}{3}(z^2 - xy, x^2 - yz, y^2 - xz)$$

Il caso $M = 3$. Una funzione scalare f, di classe C^1, definita su un sottoinsieme aperto U di $\mathbb{R}^3$, determina una 3-forma differenziale

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \, .$$

Essa è sempre chiusa, essendo $d\omega$ una 4-forma differenziale definita su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$.

Teorema. *Se U è stellato rispetto all'origine, la funzione $f : U \to \mathbb{R}$ è sempre della forma $f = \operatorname{div} W$, dove $W : U \to \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori definito da*

$$W(\boldsymbol{x}) = \left(\int_0^1 t^2 f(t\boldsymbol{x})\, dt \right) \boldsymbol{x} \, .$$

Ogni altro campo di vettori $\tilde{W} : U \to \mathbb{R}^3$ tale che $F = \operatorname{div} \tilde{W}$ si ottiene da W aggiungendo il rotore di un qualsiasi campo di vettori.

Dimostrazione. Usando la regola di Leibniz, si ha:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^1 t^2 f(t\boldsymbol{x}) x_1\, dt + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^1 t^2 f(t\boldsymbol{x}) x_2\, dt + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_0^1 t^2 f(t\boldsymbol{x}) x_3\, dt \\
&= \int_0^1 \left(t^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(t\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(t\boldsymbol{x}) \right) + 3t^2 f(t\boldsymbol{x}) \right) dt \\
&= f(\boldsymbol{x}) \, ,
\end{aligned}$$

come si vede applicando il teorema fondamentale alla funzione $\phi(t) = t^3 f(t\boldsymbol{x})$. La seconda parte del teorema segue dal fatto che, se $\operatorname{div} W = \operatorname{div} \tilde{W}$, allora, per il teorema precedente, $W - \tilde{W}$ ha un potenziale vettore. ■

Esempio. Consideriamo la funzione scalare $f(x, y, z) = xyz$. Si ha:

$$W(x, y, z) = \int_0^1 t^5 xyz\, dt\, (x, y, z) = \frac{1}{6}(x^2yz, xy^2z, xyz^2) \, .$$

15 La dimostrazione del teorema di Stokes-Cartan

Siano U un aperto di $\mathbb{R}^N$, V un aperto [7] di $\mathbb{R}^P$ e $\phi : V \to U$ una funzione di classe C^1 :

$$\phi(\boldsymbol{y}) = (\phi_1(\boldsymbol{y}), ..., \phi_N(\boldsymbol{y}))\,,$$

con $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_P) \in V$. Data una $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$,

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M}\,,$$

resta definita una $M-$forma differenziale $T_\phi \omega : V \to \Omega_M(\mathbb{R}^P)$, che chiameremo trasformata attraverso ϕ di ω, nel seguente modo:

$$T_\phi \omega(\boldsymbol{y}) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_M \le N} f_{i_1,...,i_M}(\phi(\boldsymbol{y})) d\phi_{i_1}(\boldsymbol{y}) \wedge ... \wedge d\phi_{i_M}(\boldsymbol{y})\,.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} d\phi_{i_1}(\boldsymbol{y}) \wedge ... \wedge\, d\phi_{i_M}(\boldsymbol{y}) = & \\ &= \left(\sum_{j=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) dy_j \right) \wedge ... \wedge \left(\sum_{j=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_M}}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) dy_j \right) \\ &= \sum_{j_1,...,j_M=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial y_{j_1}}(\boldsymbol{y}) \cdots \frac{\partial \phi_{i_M}}{\partial y_{j_M}}(\boldsymbol{y})\, dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_M} \end{aligned}$$

(attenzione, qui gli indici $j_1, ..., j_M$ non sono in ordine crescente). È immediato verificare che, preso $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$T_\phi(c\omega) = c\, T_\phi \omega\,;$$

se $\tilde{\omega}$ è una $\tilde{M}-$forma differenziale definita su U,

$$T_\phi(\omega \wedge \tilde{\omega}) = T_\phi \omega \wedge T_\phi \tilde{\omega}\,,$$

e se $M = \tilde{M}$,

$$T_\phi(\omega + \tilde{\omega}) = T_\phi \omega + T_\phi \tilde{\omega}\,.$$

Dimostriamo ora le seguenti proprietà.

Proposizione 1. *Se $\psi : W \to V$ e $\phi : V \to U$, allora*

$$T_\psi(T_\phi \omega) = T_{\phi \circ \psi} \omega\,.$$

[7] Nel caso in cui gli insiemi U e V non fossero degli aperti, si veda la nota a pag. 135.

Dimostrazione. Per le proprietà di linearità viste sopra, sarà sufficiente considerare il caso di una forma differenziale del tipo

$$\omega(\boldsymbol{x}) = f_{i_1,\dots,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M} \,.$$

Abbiamo:

$$T_\psi(T_\phi\omega) = \left[(f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi) \sum_{j_1,\dots,j_M=1}^{P} \frac{\partial \phi_{i_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial \phi_{i_M}}{\partial y_{j_M}} \right] \circ \psi \; d\psi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{j_M} \,.$$

D'altra parte,

$$T_{\phi\circ\psi}\omega = (f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi \circ \psi)\, d(\phi\circ\psi)_{i_1} \wedge \dots \wedge d(\phi\circ\psi)_{i_M} \,,$$

ed essendo

$$d(\phi\circ\psi)_{i_k} = d(\phi_{i_k} \circ \psi) = \sum_{j=1}^{P} \left(\frac{\partial \phi_{i_k}}{\partial y_j} \circ \psi \right) d\psi_j \,,$$

si ha l'uguaglianza. ■

Proposizione 2. *Supponiamo che ϕ sia di classe C^2. Se ω è di classe C^1, anche $T_\phi\omega$ lo è, e si ha:*

$$d(T_\phi\omega) = T_\phi(d\omega) \,.$$

Dimostrazione. Anche qui basta considerare il caso $\omega = f_{i_1,\dots,i_M}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}
d(T_\phi\omega) &= d(f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M} + \\
&\qquad + (f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi)\, d(d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M}) \\
&= d(f_{i_1,\dots,i_M} \circ \phi) \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M} \\
&= \left[\sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f_{i_1,\dots,i_M}}{\partial x_m} \circ \phi \right) d\phi_m \right] \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M} \,.
\end{aligned}$$

D'altra parte, si ha

$$d\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f_{i_1,\dots,i_M}}{\partial x_m}(\boldsymbol{x})\, dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_M} \,,$$

per cui

$$T_\phi(d\omega) = \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial f_{i_1,\dots,i_M}}{\partial x_m} \circ \phi \right) d\phi_m \wedge d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_M} \,,$$

e la formula è dimostrata. ■

Proposizione 3. *Se $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è una $M-$ superficie con supporto contenuto in U, allora*

$$\int_\sigma \omega = \int_I T_\sigma \omega \,.$$

Dimostrazione. Come sopra, basta considerare il caso $\omega = f_{i_1,...,i_M}\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_I T_\sigma \omega &= \int_I f_{i_1,...,i_M}(\sigma(\boldsymbol{u})) \sum_{j_1,...,j_M=1}^{M} \frac{\partial \sigma_{i_1}}{\partial u_{j_1}}(\boldsymbol{u}) ... \frac{\partial \sigma_{i_M}}{\partial u_{j_M}}(\boldsymbol{u})\, du_{j_1} \wedge ... \wedge du_{j_M} \\ &= \int_I f_{i_1,...,i_M}(\sigma(\boldsymbol{u})) \det \sigma'_{(i_1,...,i_M)}(\boldsymbol{u})\, du \\ &= \int_\sigma \omega \,.\end{aligned}$$

■

Passiamo ora alla dimostrazione del **teorema di Stokes - Cartan**, di cui riscriviamo l'enunciato.

Teorema. *Sia $0 \leq M \leq N-1$. Se $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ è una $M-$forma differenziale di classe C^1 e $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ una $(M+1)-$superficie il cui supporto è contenuto in U, si ha:*

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega \,.$$

Dimostrazione. Il caso $M = 0$ segue dal teorema fondamentale applicato alla funzione $\omega \circ \sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo ora $1 \leq M \leq N-1$. Essendo

$$\int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega = \int_{I_k} T_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega = \int_{I_k} T_{\alpha_k^+}(T_\sigma \omega) = \int_{\alpha_k^+} T_\sigma \omega \,,$$

con le analoghe uguaglianze per β_k^+ si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\sigma} \omega &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\sigma\circ\alpha_k^+} \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\sigma\circ\beta_k^+} \omega \\ &= \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k \int_{\alpha_k^+} T_\sigma \omega + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^{k-1} \int_{\beta_k^+} T_\sigma \omega \\ &= \int_{\partial I} T_\sigma \omega \,.\end{aligned}$$

Se σ è di classe C^2, si ha che $T_\sigma\omega$ è di classe C^1 e, applicando la formula di Gauss a $T_\sigma\omega$, si ha

$$\int_{\partial I} T_\sigma\omega = \int_I d(T_\sigma\omega)\,.$$

Ma

$$\int_I d(T_\sigma\omega) = \int_I T_\sigma(d\omega) = \int_\sigma d\omega\,.$$

In definitiva, abbiamo visto che

$$\int_\sigma d\omega = \int_I d(T_\sigma\omega) = \int_{\partial I} T_\sigma\omega = \int_{\partial\sigma} \omega\,,$$

e il teorema, in questo caso, è dimostrato.

L'ipotesi che $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ sia di classe C^2 può essere tolta con un procedimento di approssimazione: è possibile costruire una successione $(\sigma_n)_n$ di $M-$superfici di classe C^2 che convergono a σ assieme a tutte le derivate parziali. La formula di Stokes-Cartan vale quindi per tali superfici, ed è sufficiente passare al limite facendo uso del teorema della convergenza dominata per concludere. ■

17 La dimostrazione del teorema di Poincaré

Consideriamo l'insieme $[0,1] \times U$, e indichiamo i suoi elementi con

$$(t, \boldsymbol{x}) = (t, x_1, ..., x_N).$$

Definiamo l'operatore lineare K che trasforma una generica $M-$forma differenziale

$$\alpha : [0,1] \times U \to \Omega_M(\mathbb{R}^{N+1})$$

in una $(M-1)-$forma differenziale

$$K(\alpha) : U \to \Omega_{M-1}(\mathbb{R}^N)$$

nel modo seguente:

a) se $\alpha(t, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x})\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{M-1}}$ (si noti che qui appare il termine dt), allora

$$K(\alpha)(\boldsymbol{x}) = \left(\int_0^1 f(t, \boldsymbol{x})\, dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{M-1}}\,;$$

b) se $\alpha(t, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M}$ (qui non appare il termine dt), allora

$$K(\alpha) = 0;$$

c) in tutti gli altri casi, K è definito per linearità (per gli addendi in una generica $M-$forma differenziale α, il termine dt appare o non appare, e si applicano le due definizioni precedenti).

Definiamo inoltre le funzioni $\psi, \xi : U \to [0,1] \times U$ nel modo seguente:

$$\psi(x_1, ..., x_N) = (0, x_1, ..., x_N)\,, \qquad \xi(x_1, ..., x_N) = (1, x_1, ..., x_N)\,.$$

Lemma. *Per una $M-$forma differenziale di classe C^1 $\alpha : [0,1] \times U \to \Omega_M(\mathbb{R}^{N+1})$ si ha:*

$$d(K(\alpha)) + K(d\alpha) = T_\xi \alpha - T_\psi \alpha\,.$$

Dimostrazione. Per la linearità, basterà considerare i due casi in cui la forma differenziale α sia di uno dei due tipi considerati in a) e b).

a) Se $\alpha(t, \boldsymbol{x}) = f(t, \boldsymbol{x})\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{M-1}}$, per la regola di Leibniz si ha:

$$d(K(\alpha))(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{N} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_m}(t, \boldsymbol{x})\, dt \right) dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{M-1}}\,;$$

d'altra parte,

$$
\begin{aligned}
d\alpha(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})\,dt \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{M-1}} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dx_m \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{M-1}} \\
&= -\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dt \wedge dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{M-1}}\,,
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
K(d\alpha)(\boldsymbol{x}) &= -\sum_{m=1}^{N} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dt \right) dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{M-1}} \\
&= -d(K(\alpha))(\boldsymbol{x})\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre, si ha che $T_\psi \alpha = T_\xi \alpha = 0$, essendo la prima componente di ψ e di ξ costante; quindi, l'uguaglianza in questo caso è dimostrata.

b) Se $\alpha(t,\boldsymbol{x}) = f(t,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M}$, si ha $K(\alpha) = 0$ e quindi $d(K(\alpha)) = 0$; d'altra parte,

$$
\begin{aligned}
d\alpha(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})\,dt \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_m}(t,\boldsymbol{x})\,dx_m \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M}\,,
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
K(d\alpha)(\boldsymbol{x}) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,\boldsymbol{x})\,dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M} \\
&= (f(1,\boldsymbol{x}) - f(0,\boldsymbol{x}))\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M}\,.
\end{aligned}
$$

Inoltre, si ha:

$$
\begin{aligned}
T_\xi \alpha(\boldsymbol{x}) &= f(1,\boldsymbol{x})\,d\xi_{i_1}(\boldsymbol{x}) \wedge \ldots \wedge d\xi_{i_M}(\boldsymbol{x}) \\
&= f(1,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_\psi \alpha(\boldsymbol{x}) &= f(0,\boldsymbol{x})\,d\psi_{i_1}(\boldsymbol{x}) \wedge \ldots \wedge d\psi_{i_M}(\boldsymbol{x}) \\
&= f(0,\boldsymbol{x})\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_M}\,.
\end{aligned}
$$

La formula è quindi dimostrata anche in questo caso. ■

Possiamo ora intraprendere la dimostrazione del **teorema di Poincaré**, di cui riportiamo l'enunciato.

Teorema. *Sia U un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ stellato rispetto ad un punto $\bar{\boldsymbol{x}}$. Per $1 \leq M \leq N$, una $M-$forma differenziale $\omega : U \to \Omega_M(\mathbb{R}^N)$ di classe C^1 è esatta se e solo se essa è chiusa. In tal caso, se ω è del tipo*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} f_{i_1,...,i_M}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \,,$$

una $(M-1)-$forma differenziale $\tilde{\omega}$ tale che $d\tilde{\omega} = \omega$ è data da

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\boldsymbol{x}) = & \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} \sum_{s=1}^{M} (-1)^{s+1}(x_{i_s} - \bar{x}_{i_s}) \cdot \\ & \cdot \left(\int_0^1 t^{M-1} f_{i_1,...,i_M}(\bar{\boldsymbol{x}} + t(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}))\, dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge ... \wedge dx_{i_M} \,.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per semplificare la scrittura, possiamo supporre $\bar{\boldsymbol{x}} = (0, 0, ..., 0)$; sia $\phi : [0, 1] \times U \to U$ definita da

$$\phi(t, x_1, ..., x_N) = (tx_1, ..., tx_N)\,.$$

Consideriamo $T_\phi\omega$, la trasformata attraverso ϕ di ω. Essa è la forma differenziale di grado M definita su $[0, 1] \times U$ come segue:

$$\begin{aligned} & T_\phi\omega(t, \boldsymbol{x}) = \\ & = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} f_{i_1,...,i_M}(t\boldsymbol{x})(x_{i_1} dt + t\, dx_{i_1}) \wedge ... \wedge (x_{i_M} dt + t\, dx_{i_M}) \\ & = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_M \leq N} f_{i_1,...,i_M}(t\boldsymbol{x})[t^M dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_M} + \\ & \qquad + t^{M-1} \sum_{s=1}^{M} (-1)^{s-1} x_{i_s} dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge ... \wedge dx_{i_M}]\,. \end{aligned}$$

Poniamo $\tilde{\omega} = K(T_\phi\omega)$. Resta da dimostrare che $d\tilde{\omega} = \omega$. Essendo ω chiusa, si ha:

$$K(d(T_\phi\omega)) = K(T_\phi(d\omega)) = K(T_\phi(0)) = K(0) = 0\,.$$

Per il lemma precedente, abbiamo che

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega} &= d(K(T_\phi\omega)) \\ &= T_\xi(T_\phi\omega) - T_\psi(T_\phi\omega) - K(d(T_\phi\omega)) \\ &= T_\xi(T_\phi\omega) - T_\psi(T_\phi\omega) \\ &= T_{\phi\circ\xi}\omega - T_{\phi\circ\psi}\omega\,. \end{aligned}$$

Essendo $\phi \circ \xi$ la funzione identità e $\phi \circ \psi$ la funzione nulla, si ha che $T_{\phi\circ\xi}\omega = \omega$ e $T_{\phi\circ\psi}\omega = 0$, il che completa la dimostrazione. ■