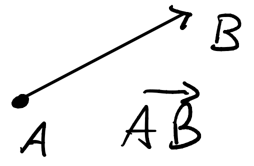
GEOMETRIA 1

2021 – 2022

Vettori geometrici

Prendiamo un segmento nel piano Euclideo, avente estremi A, B



Il segmento AB ha una

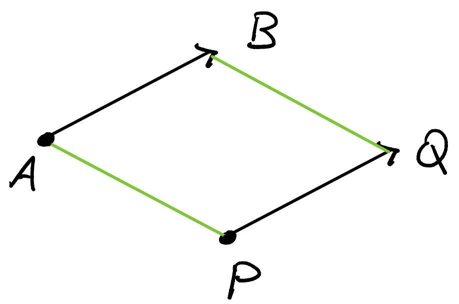
- direzione (la retta che lo contiene)
- lunghezza

Possiamo fissare un'orientazione (per esempio da A a B)

Denotiamo questo segmento orientato con $\vec{AB}$

$\vec{AB} \rightsquigarrow$ traslazione del piano:

P punto del piano $\rightsquigarrow$ Q = traslato di P



P viene traslato nel punto Q ottenuto in modo che $APQB$ sia un parallelogramma di lati AP, PQ, QB, AB.

Pertanto $\vec{AB}$ e $\vec{PQ}$:

1) sono paralleli
2) hanno la stessa orientazione
3) hanno la stessa lunghezza.

Quindi $\vec{AB}$ e $\vec{PQ}$ (e tutti gli altri segmenti orientati ottenuti in modo simile) rappresentano la stessa traslazione del piano (o dello spazio).

Questa considerazione porta ad un importante passaggio astrattivo: identificare tra loro tutti i segmenti orientati aventi le proprietà 1), 2), 3), dal momento che danno luogo alla stessa traslazione.

Definizione Due segmenti orientati $\vec{AB}$ e $\vec{A'B'}$ sono detti equipollenti (o equivalenti) se soddisfano le proprietà 1), 2), 3) come sopra.

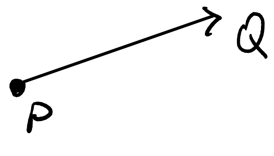
Se ora $\vec{AB}$ è un segmento orientato nel piano denotiamo con $[\vec{AB}]$ la collezione di tutti i segmenti orientati equipollenti ad $\vec{AB}$ (classe di equipollenza di $\vec{AB}$).

Definizione Si chiama vettore geometrico la classe di equipollenza di un segmento orientato.
Si considera anche il vettore nullo $0 = [\vec{AA}]$.

Pertanto un vettore v non è un segmento orientato, ma è un insieme, rappresentato da uno qualunque dei segmenti orientati tra loro equipollenti.

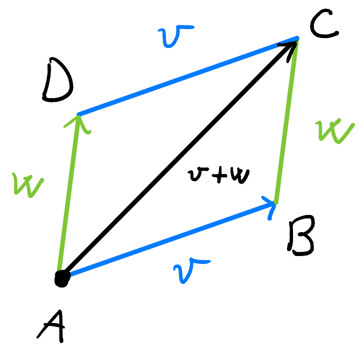
Si osservi che se v è un vettore geometrico e P è un punto del piano, allora esiste ed è unico un punto Q tale che il segmento orientato $\vec{PQ}$ rappresenta v

$$v = [\vec{PQ}]$$



Operazioni con i vettori geometrici

Siano v e w due vettori geometrici. Vogliamo definire la loro somma: prendiamo un punto A nel piano e due rappresentanti di v e w $v = [\vec{AB}]$, $w = [\vec{BC}]$ scelti in modo che il punto terminale del rappresentante di v coincide col punto iniziale del rappresentante di w.



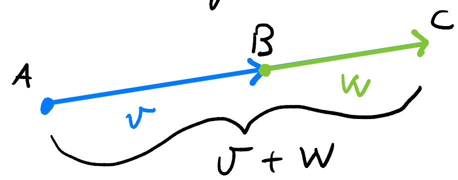
Definizione $v + w$ è il vettore geometrico rappresentato dal segmento orientato $\vec{AC}$ ottenuto come sopra, cioè

$$v + w = [\vec{AB}] + [\vec{BC}] \overset{def}{=} [\vec{AC}].$$

In altri termini $\vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma $ABCD$, dove D è il punto terminale del rappresentante $\vec{AD}$ di $w = [\vec{AD}]$

(ogni vettore geometrico ha infiniti rappresentanti).
Quindi $v + w$ si può determinare con la regola del parallelogramma studiata alle superiori.

Si osservi che il parallelogramma degenera se v e w sono paralleli.



Osservazione $v + 0 = 0 + v = v$

Prodotto (per uno) scalare

Definizione Sia $v = [\vec{AB}]$ e α un numero reale. Definiamo il prodotto αv come il vettore geometrico di lunghezza $|\alpha| \cdot \bar{AB}$, parallelo ad $\vec{AB}$ e avente la stessa orientazione di v se $\alpha > 0$ e orientazione opposta se $\alpha < 0$.
In particolare $0 \cdot v = 0$ e $1 v = v$.

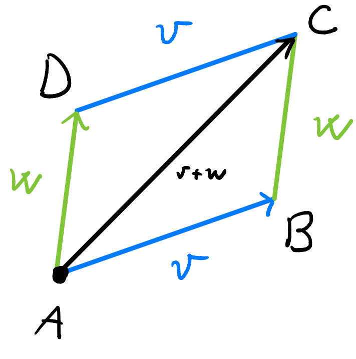
Osservazione Usando le proprietà elementari della Geometria Euclidea classica si può (facilmente) dimostrare che le definizioni di somma di vettori geometrici e di prodotto scalare sono <u>ben poste</u>, nel senso che dipendono <u>solo dai vettori</u> in questione, ma <u>non dai rappresentanti</u> scelti.

Teorema Se u, v, w sono vettori geometrici qualunque, allora

1) $v + w = w + v$ (proprietà commutativa)
2) $v + (w + u) = (v + w) + u$ (proprietà associativa)

Dimostrazione

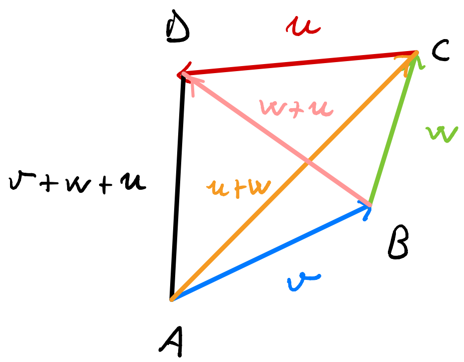
1) nel parallelogramma ABCD



$$v + w = [\vec{AB}] + [\vec{BC}] = [\vec{AC}]$$

$$w + v = [\vec{AD}] + [\vec{DC}] = [\vec{AC}].$$

2) Scegliamo rappresentanti consecutivi di
$v = [\vec{AB}]$, $w = [\vec{BC}]$, $u = [\vec{CD}]$

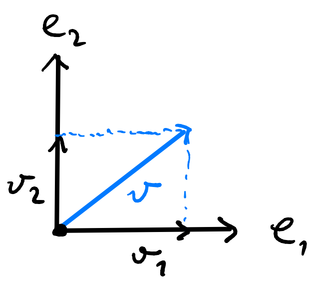


$$v + (w+u) = [\vec{AB}] + ([\vec{BC}] + [\vec{CD}]) =$$
$$= [\vec{AB}] + [\vec{BD}] = [\vec{AD}]$$
$$(v+w) + u = ([\vec{AB}] + [\vec{BC}]) + [\vec{CD}] =$$
$$= [\vec{AC}] + [\vec{CD}] = [\vec{AD}].$$

Si può anche dimostrare che, comunque si scelgano numeri reali α e β, e vettori geometrici v e w, si ha:

- $\alpha \cdot (v+w) = \alpha v + \alpha w$
- $(\alpha+\beta) v = \alpha v + \beta v$
- $v + (-1) v = 0$ $\quad$ (si pone $-v \overset{def}{=} (-1) v$)

Componenti Prendiamo due vettori non paralleli (e non nulli) e chiamiamoli e_1, e_2. Per semplicità sceglieremo ortogonali e di lunghezza 1. Sia ora v un qualunque vettore geometrico.



Proiettiamo v su e_1 parallelamente a e_2 e su e_2 parallelamente a e_1.
Queste proiezioni sono due vettori v_1 paralleli a e_1 e v_2 paralleli a e_2. Si ha quindi

$$v_1 = \alpha_1 e_1, \qquad v_2 = \alpha_2 e_2$$

dove α_1, α_2 sono opportuni numeri reali.

Dal parallelogramma si ottiene

$$v = v_1 + v_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

Definizione Un vettore della forma $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ si chiama combinazione lineare di e_1 e e_2.
I numeri α_1 e α_2 sono detti coefficienti della combinazione lineare.

Pertanto ogni vettore geometrico del piano è esprimibile come combinazione lineare di e_1 e e_2, mediante opportuni coefficienti.
Si può anche dimostrare che ogni dato vettore geometrico è esprimibile in modo unico come combinazione lineare di e_1 e e_2.

Pertanto, una volta scelti i vettori e_1 e e_2, ad ogni vettore v si possono associare le sue componenti (o coordinate) rispetto ai vettori e_1 e e_2

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \rightsquigarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2.$$

$\boxed{\text{dove } R^2 \text{ è l'insieme delle coppie ordinate } (x, y) \text{ di numeri reali.}}$

Si ha allora

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ w &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \end{aligned} \rightsquigarrow v + w = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2$$

cioè alla somma di vettori corrisponde la somma delle componenti corrispondenti.

Inoltre $\gamma \cdot v = \gamma \cdot (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (\gamma \alpha_1) e_1 + (\gamma \alpha_2) e_2$.

Queste considerazioni portano a definire le seguenti operazioni di somma e prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$;

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) \overset{def}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$$

$$\gamma \cdot (\alpha_1, \alpha_2) \overset{def}{=} (\gamma \alpha_1, \gamma \alpha_2)$$

e chiameremo <u>vettori</u> gli elementi di $\mathbb{R}^2$, cioè i vettori del piano sono coppie ordinate di numeri reali.