RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA

$$v \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sp. vett. sul} \\ \text{campo } \mathbb{C}}}{V_R} \qquad v \mapsto e^{i\alpha^a t^a_R}\, v$$

← Trasf. sotto il gruppo

$$v^* \mapsto \underbrace{e^{-i\alpha^a t^{a*}_R}}_{\substack{\text{forniscono una} \\ \text{RAPP. di } G}} v^* \quad \rightarrow \quad v^* \in \bar{R} \qquad t^a_{\bar{R}} = -t^{a*}_R$$

importante per Mecc. Quant. ⤳ presenza probab.

Se consideriamo RAP. UNITARIE di G (HERM. di $\mathcal{G}$)

$$t^a_{\bar{R}} = -t^{a*}_R = -t^{aT}_R$$

$$[-t^{aT}_R, -t^{bT}_R] = t^{aT}_R t^{bT}_R - t^{bT}_R t^{aT}_R = -([t^a_R, t^b_R])^T =$$

$$= -(i f^{abc} t^c_R)^T = i f^{abc} (-t^c_R)^T .$$

R è equiv. a $\bar{R}$ (e in tal caso è dichiarata rap. REALE)

se $\exists$ una trasf. unitaria U t.c. $t^a_{\bar{R}} = U t^a_R U^\dagger$

→ in questo caso $\exists\ a_{ij}$ t.c. $\forall\ \xi, \eta \in V_R$

$a_{ij}\, \eta_i\, \xi_j$ è INVARIANTE

[Infinitesimamente la variazione di $\eta_i a_{ij} \xi_j = \eta^T a \xi$ è

$$\delta(\eta^T a \xi) = -i\alpha^a \eta^T [(t^a_R)^T a + a\, t^a_R]\xi$$

$$= -t^a_{\bar{R}} \overset{\text{se } R \text{ è reale}}{=} -U t^a_R U^\dagger$$

$$= -i\alpha^a \eta^T (-U t^a_R U^\dagger a + a\, t^a_R)\xi$$

/

$\downarrow$

$\exists\, a$ t.c. $\eta^T a \xi$ è inv. $\forall \xi$ e qto

a è dato da

$$a_{ij} = U_{ij} \qquad]$$

Si distinguono due casi di rap. REALE:

1) a_{ij} è SIM $\rightarrow$ R è REALE

2) a_{ij} è ANTISIM $\rightarrow$ R è PSEUDOREALE

ES. SU(2)

$R = \underline{2}$ $\quad t^a_R = \frac{\sigma^a}{2}$ $\quad a = 1,2,3$

$$t^a_{\bar{R}} = -\frac{(\sigma^a)^T}{2} = (i\sigma^2)\,\frac{\sigma^a}{2}\,(-i\sigma^2) \qquad \overset{=G}{\overset{\uparrow}{U}} = i\sigma^2 = \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ PSEUDO-REALE $\Leftarrow$ antisimm. $\nearrow$

$R = \underline{3}$ $\quad t^a_R$ sono matrici immaginarie $\quad G_{ij} = \delta_{ij}$

$\rightarrow$ REALE $\Leftarrow$ simmetrica $\nearrow$

RAPPRESENTAZ. AGGIUNTA (Ad)

$V_R = \mathcal{G}$ Il prodotto di Lie $[\,,\,]$ fornisce un'azione lineare di $\mathcal{G}$ su sé stessa

Prendiamo $t \in \mathcal{G}$, allora $[t, \cdot]$ è una mappa lineare su $\mathcal{G}$

→ può essere rap. da matrici, una volta che scegliamo una base T^a

$$\underbrace{t^a_{Ad}}_{\text{matrice}} \cdot T^b = [T^a, T^b] = i \underbrace{f^{abc}}_{\substack{\text{comb. lin.}\\ \text{di vett}}} T^c$$

$$A \cdot \underline{e_m} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elem. della matrice} \\ \text{che rapp. } A}}{a_{im}} \underline{e_i}$$

$$V = V_i \underline{e_i}$$

$$(A \cdot V)_j = a_{ji} V_i$$

$$(t^a_{Ad})^{cb} = i f^{abc}$$

f^{abc} sono REALI e ANTISIMM ⇒ $-(t^a_{Ad})^T = t^a_{Ad}$

→ REALE

$$\dim \mathrm{Adj} = \begin{cases} N^2 - 1 & SU(N) \\ N(N-1)/2 & SO(N) \\ N(N+1)/2 & Sp(N) \end{cases}$$

Nota: dim $SU(2)$ = dim $SO(3)$

→ non è un caso: $\underbrace{\text{le alg. di Lie}}_{\text{l'alg. dei MOMENTI ANGOLARI}}$ sono ISOMORFE

l'alg. dei MOMENTI ANGOLARI (generatori delle rotazioni)

↳ M_x, M_y, M_z hanno regole di comm. di $su(2)$ (PB in mecc. class. com. in " quant.)

Rappresentaz. studiate in corso M.Q.

$R = \underline{1}$ spin $= 0$

$R = \underline{2}$ spin $= 1/2$

$R = \underline{3}$ spin $= 1$

⋮ ⋮

$\Big\}$ s ↑ numero cost. in una data rep.

↓

questo numero dà il valore di $\bar{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ ↙ t_R^a

In una IRREP $\bar{S}^2 = s(s+1)\hbar \mathbb{1}_R$ → esso COMMUTA con ogni elem. dell'alg., e in partic. comm. con tutti i generatori

CASIMIR OPERATOR

Per ogni rapp. R di $\mathcal{G}$, la matrice

$$T^2 \equiv t_R^a t_R^a \qquad (\text{sommato su } a)$$

commuta con tutti i $t \in \mathcal{g}$.

$$[t_R^b, t_R^a t_R^a] = t_R^a [t_R^b, t_R^a] + [t_R^b, t_L^a] t_R^a =$$

$$= t^a i f^{bac} t^c + i f^{b\overset{c}{a}\overset{a}{c}} t^{\overset{a}{c}} t^{\overset{c}{a}} =$$

$$= i t^a t^c \left(f^{b\underline{ac}} + f^{b\underline{ca}} \right) = 0$$

T^2 si dice un INVARIANTE dell'alg., prende un valore fisato in ogni IRREP

$$\Rightarrow \quad t^a_R\, t^a_R = C_2(R)\, \mathbb{1}_R$$

$C_2(R)$ è chiamato

QUADRATIC CASIMIR OPERATOR

$\uparrow$
appare in osservabili di teorie di campo non abeliane

In $R = \mathrm{Adj}$

$$i f^{abc}\, i f^{acd} = c_2(G)\, \delta^{bd}$$

$$\rightarrow f^{bac} f^{dac} = c_2(G)\, \delta^{bd}$$

L'invariante $C(R)$, legato alla normalizzazione, può essere derivato se conosciamo $c_2(R)$:

$$\begin{array}{l} \mathrm{tr}_R\, t^a_R t^a_R = c_2(R)\, \mathrm{tr}_R \mathbb{1}_R = \\ \qquad \shortparallel \\ \delta^{ab}\, \mathrm{tr}_R\, t^a_R t^b_R = C(R)\, \delta^{ab} \delta^{ab} = \end{array} \boxed{\begin{array}{c} c_2(R)\, \dim(R) \\ \shortparallel \\ C(R)\, \dim(G) \end{array}}$$

ES. $\quad SU(N) \qquad C(N) = 1/2$

$$\rightarrow c_2(N) = C(N)\, \frac{\dim(SU(N))}{\dim(N)} = C(N)\, \frac{N^2-1}{N}$$

$$= \frac{N^2-1}{2N}$$

PRODOTTO TENSORE DI RAPP.

Consideriamo lo sp. vett. $V_{R_1} \otimes V_{R_2}$ dove R_1, R_2 sono IRREP

Qto è lo sp. vett. di una RAPP. che chiamiamo $R_1 \otimes R_2$ → $\dim(R_1 \otimes R_2) = \dim R_1 \cdot \dim R_2$

I generatori sono:

$$t^a_{R_1 \otimes R_2} = t^a_{R_1} \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes t^a_{R_2} \qquad (\circ)$$

In generale $R_1 \otimes R_2$ è RIDUCIBILE :

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_i R_i \qquad (*)$$

Casimir op :

$$\left(t^a_{R_1 \otimes R_2}\right)^2 = \left(t^a_{R_1}\right)^2 \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes \left(t^a_{R_2}\right)^2 + 2\, t^a_{R_1} \otimes t^a_{R_2}$$

Facciamo la traccia ($\mathrm{tr}(A \otimes B) = (\mathrm{tr}A)(\mathrm{tr}B)$ prop. distrib.)

$$\mathrm{tr}\left(t^a_{R_1 \otimes R_2}\right)^2 = \dim R_2 \, \mathrm{tr}\left(t^a_{R_1}\right)^2 + \dim R_1 \, \mathrm{tr}\left(t^a_{R_2}\right)^2 =$$

$$= \left[c_2(R_1) + c_2(R_2)\right] \dim R_1 \cdot \dim R_2$$

D'altra parte

$$\mathrm{tr}\left(t^a_{R_1 \otimes R_2}\right)^2 = \sum_i \mathrm{tr}\left(t^a_{R_i}\right)^2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i$$

$$\left(c_2(R_1) + c_2(R_2)\right) \dim R_1 \dim R_2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i \qquad (\#)$$

Es: $SU(N)$ $\quad R_1 = N \quad R_2 = \bar{N}$

$N \otimes \bar{N}$ → dim. di $V_{N\otimes\bar{N}}$ sono matrici $N\times N$

e tali matrici possono essere scritte

come $$\underset{1}{\alpha\,\delta^{ij}} + \underset{\text{traceless}}{M^{ij}} \leftarrow N^2-1$$

$$\underset{0}{t_1^a}\, t_1^a = c_2(1)\, \underset{1}{\mathbb{1}_1}$$

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus Ad$$

Applichiamo $(\ast)$ $$2\,\overset{\frac{N^2-1}{2N}}{c_2(N)}\, N^2 = \overset{0}{C_2(1)}\, \dim(1) + C_2(G) \dim G$$

$$\Rightarrow \quad C_2(G) = N \quad \Rightarrow \quad C(N) = N$$

SIMMETRIA DI GAUGE

→ simm. interne locali (non Lorentz.)

→ Necessarie per descrivere campi con spin 1 e massa nulla (per i campi con spin 2 si rendono locali le trasf. di Lorentz/Poincaré ⇝ GRAVITÀ)

→ Es. più semplice

$$\mathcal{L}_0 = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \qquad \sigma^\mu(\mathbb{1}, \sigma^i)$$

invariante sotto $\psi_L \mapsto e^{i\alpha}\psi_L$ $\qquad \bar{\sigma}^\mu(\mathbb{1}, -\sigma^i)$

→ GAUGING: $\alpha \to \alpha(x)$

$\mathcal{L}_0$ non è più invariante (a causa della presenza $\partial_\mu\psi_L$)

⇓

Introduciamo DERIVATA COVARIANTE $D_\mu\psi$

t.c. $D_\mu\psi_L \mapsto e^{i\alpha(x)} D_\mu\psi_L$

⇒ $\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_L$ è inv. sotto trasf. di gauge $\psi_L(x) \mapsto e^{i\alpha(x)}\psi_L(x)$

$\mathcal{L}_0(\phi, \partial\phi)$ inv. sotto trasf. globali

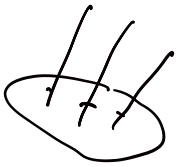
⇒ $\mathcal{L}(\phi, D\phi)$ " " " locali (di gauge)

Γ Più formalm. la derivata di $\psi(x)$ nella direzione n^μ è

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)}{\epsilon}$$

trasf. in maniera diversa

ψ è una sezione di un FIBRATO VETTORIALE



Per ovviare a pti confrontare uno introduce una CONNESSIONE

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes T^*M)$$ mappa lineare

che soddisfa

1) $D(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2) = \alpha_1 D_1 s_1 + \alpha_2 D_2 s_2$ LIN.

3) $D(\underset{\uparrow}{f} s) = df\, s + f\, Ds$ LEIBNIZ RULE

funz.

Se uno prende triviolizz. locale (sist. coordinate) $s \in E_x$

$$D_\mu s = \partial_\mu s + i A_\mu s$$

uguale per tutte le connessioni

op. lineare che distingue tra le diverse connessioni

Elettrodin. scalare : ϕ scalare complesso $\phi(x) \in E_x \cong \mathbb{C}$