

Il campo rotante prodotto da avvolgimenti
trifase in corrente alternata

Obiettivo dello studio

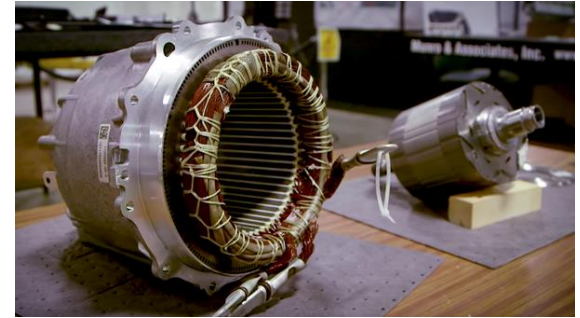
Una macchina elettrica rotante in corrente alternata è, tipicamente, dotata di un avvolgimento elettrico trifase sullo statore, cioè nella parte «statica» entro la quale ruota il rotore.



Statore e rotore di macchina asincrona (o a induzione)



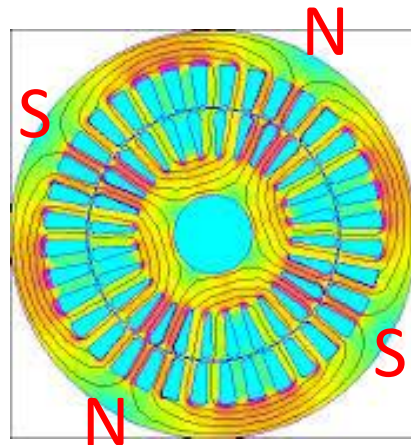
Statore e rotore di macchina sincrona con rotore avvolto



Statore e rotore di macchina sincrona a magneti permanenti

Per macchine asincrone, sincrone a rotore avvolto, a riluttanza e a magneti permanenti, lo statore è dotato di un avvolgimento elettrico trifase, alimentato in corrente alternata, che serve a produrre un campo magnetico rotante all'interno dello statore stesso. Questo campo magnetico porta in rotazione il rotore con meccanismi diversi a seconda del tipo di rotore stesso.

La macchina elettrica si dice avere $2p$ poli, ovvero p coppie polari, quando il campo magnetico prodotto dallo statore consiste di $2p$ poli magnetici (N e S) con polarità alterne.



Esempio: campo magnetico prodotto dall'avvolgimento elettrico di una macchina a quattro poli

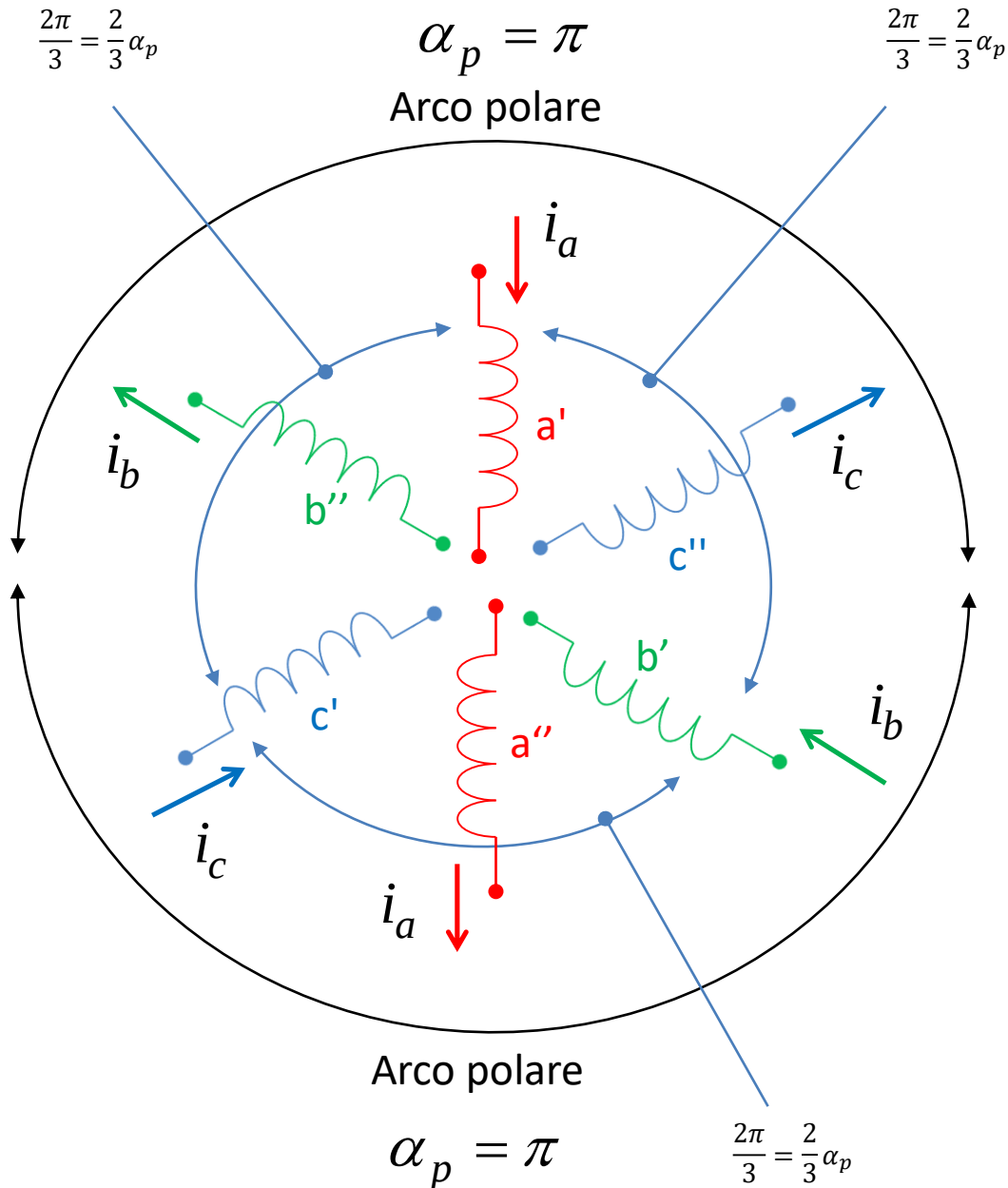
L'obiettivo dello studio è quello di analizzare il meccanismo fisico di generazione del campo rotante e di trovarne una espressione analitica in funzione della struttura dell'avvolgimento che lo produce e delle correnti con cui l'avvolgimento è alimentato.

Si esaminerà prima una descrizione astratta dell'avvolgimento trifase e quindi si descriverà la sua implementazione nelle macchine elettriche reali.

Si prenderà in considerazione il caso più frequente, che è quello di avvolgimento elettrico trifase a **doppio strato** (v. dopo per caratteristiche costruttive).

Infatti, il funzionamento di un avvolgimento elettrico a **singolo strato** può essere semplicemente descritto usando i risultati della trattazione relativa al doppio strato.

Modello astratto di avvolgimento elettrico trifase



Caso di macchina a due poli

Numero di coppie polari: $p=1$

In una macchina a due poli, le tre fasi sono **circuiti elettrici uguali tra di loro** (indicati convenzionalmente con le lettere a, b, c), disposti lungo la periferia dello statore e **sfasati tra di loro di uno stesso angolo**, pari quindi a $120^\circ = 2\pi/3$.

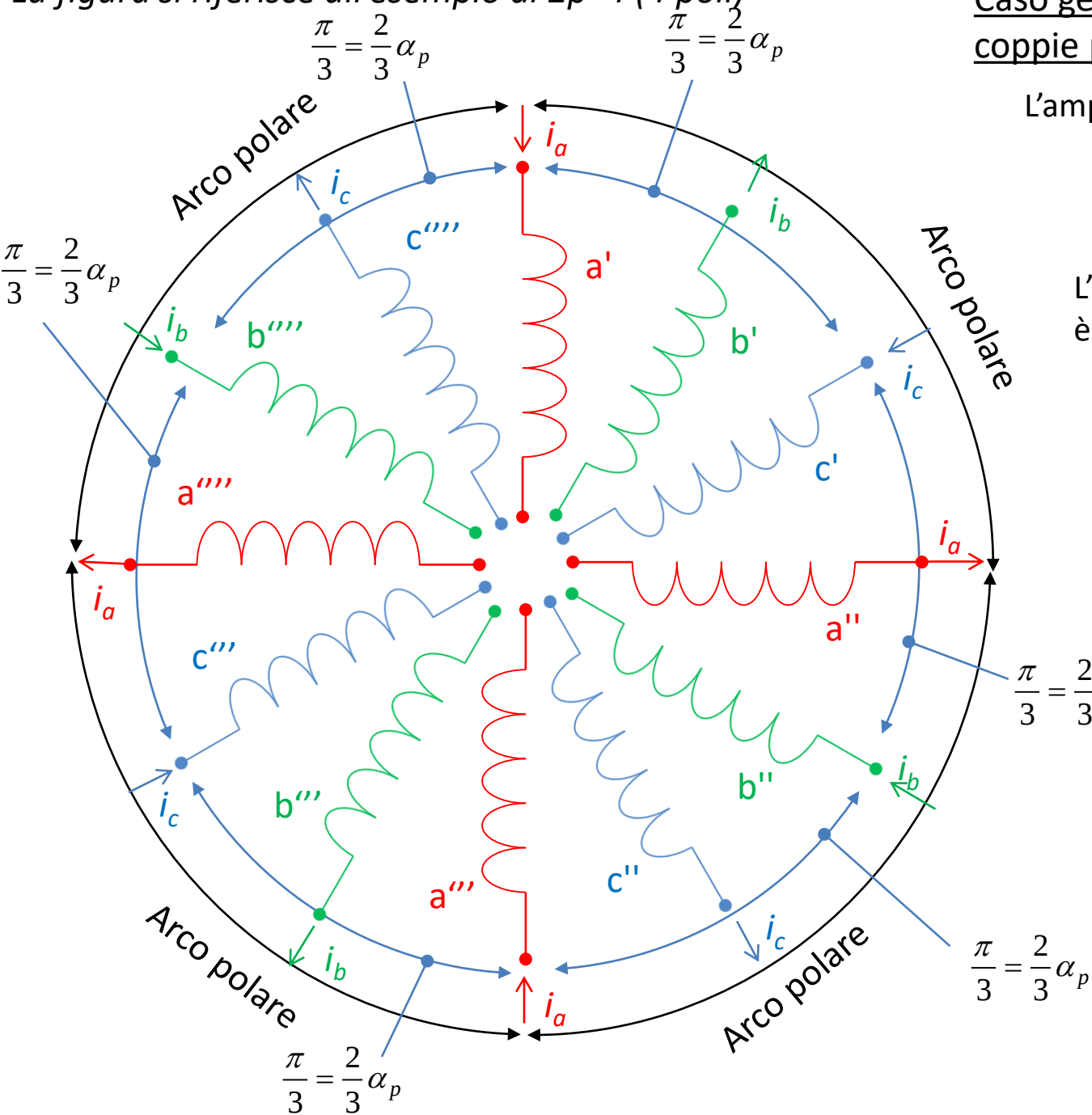
L'arco polare per una macchina a due poli è:

$$\alpha_p = \pi$$

Ogni fase comprende un gruppo di bobine per ogni polo (**gruppo di bobine per polo-fase**). I due gruppi di bobine per la fase a sono indicati come a' e a'' , per la fase b come b' e b'' e per la fase c come c' e c'' .

I gruppi di bobine di una stessa fase possono essere connessi tra loro in serie o in parallelo ma sono tutti percorsi dalla stessa corrente, con versi alterni passando da un polo all'altro.

La figura si riferisce all'esempio di $2p=4$ (4 poli)



Caso generale di macchina a p coppie polari

L'ampiezza angolare di ogni polo è:

$$\alpha_p = \frac{\pi}{2p}$$

L'angolo fra due fasi consecutive è:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \alpha_p$$

Ogni fase comprende un gruppo di bobine per ogni polo (**gruppo di bobine per polo-fase**), che possono essere tra loro connessi in serie o in parallelo, in modo che ciascuno porti la stessa corrente, con versi alterni passando da un polo a quello successivo.

Gli angoli visti finora sono detti «angoli meccanici», cioè sono angoli fisici che potrebbero essere misurati sulla macchina reale.

Allo scopo di svincolarsi dal numero di poli, si introducono i cosiddetti «angoli elettrici».

L'angolo elettrico α_e corrispondente ad un angolo meccanico α è semplicemente definito come:

$$\alpha_e = p \cdot \alpha$$

Per tanto gli angoli elettrici sono sempre compresi tra 0 e 2π .

Ad esempio, l'angolo elettrico corrispondente ad un polo è sempre:

$$\alpha_{p,e} = p \cdot \alpha_p = p \frac{2\pi}{2p} = \pi \quad \text{come per macchina a due poli}$$

Per tanto gli angoli elettrici sono sempre compresi tra 0 e 2π .

Ad esempio, l'angolo elettrico di sfasamento tra due fasi è sempre:

$$p \cdot \frac{2}{3} \alpha_p = p \frac{2}{3} \frac{2\pi}{2p} = \frac{2}{3} \pi \quad \text{come per macchina a due poli}$$

Quindi usando gli angoli elettrici anzichè quelli meccanici ci si riconduce al caso di una macchina «equivalente» a due poli.

Implementazione fisica dell'avvolgimento trifase e schemi di avvolgimento

Gli avvolgimenti elettrici sono collocati all'interno di cave presenti in un nucleo magnetico laminato di forma cilindrica cava, detto pacco magnetico.

Il **pacco magnetico** è ottenuto implando e pressando singoli lamierini, di spessore dell'ordine dei decimi di millimetro, tra loro tutti uguali. I lamierini sono realizzati in materiale ferromagnetico dolce (lega di ferro-silicio) ad alta permeabilità magnetica allo scopo di aumentare l'intensità del campo magnetico rotante a parità di correnti che lo producono.



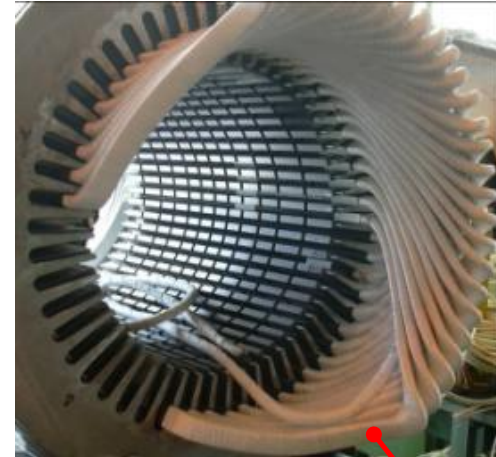
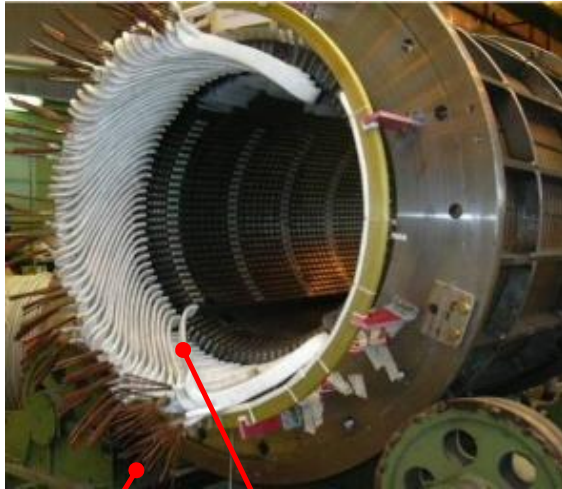
Pacco magnetico laminato



Singolo lamierino

L'avvolgimento è usualmente composto da **bobine** multispira i cui lati attivi (parti rettilinee) vengono collocati all'interno delle cave del nucleo statorico.

Si nota come l'uso del doppio strato consenta di comporre l'avvolgimento con bobine tutte uguali evitando accavallamenti delle testate.

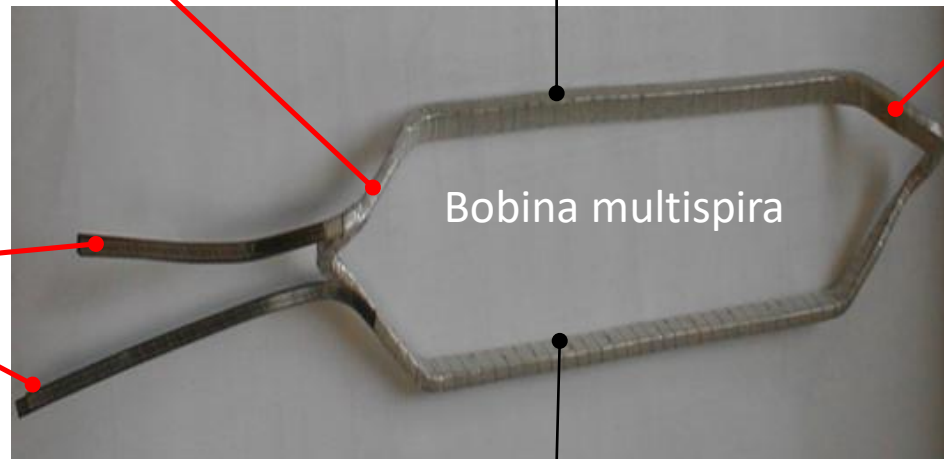


Testate lato collegamenti

Testate lato opposto collegamenti

Lato attivo

Terminali di bobina
(capi della prima e
dell'ultima spira)



Lato attivo

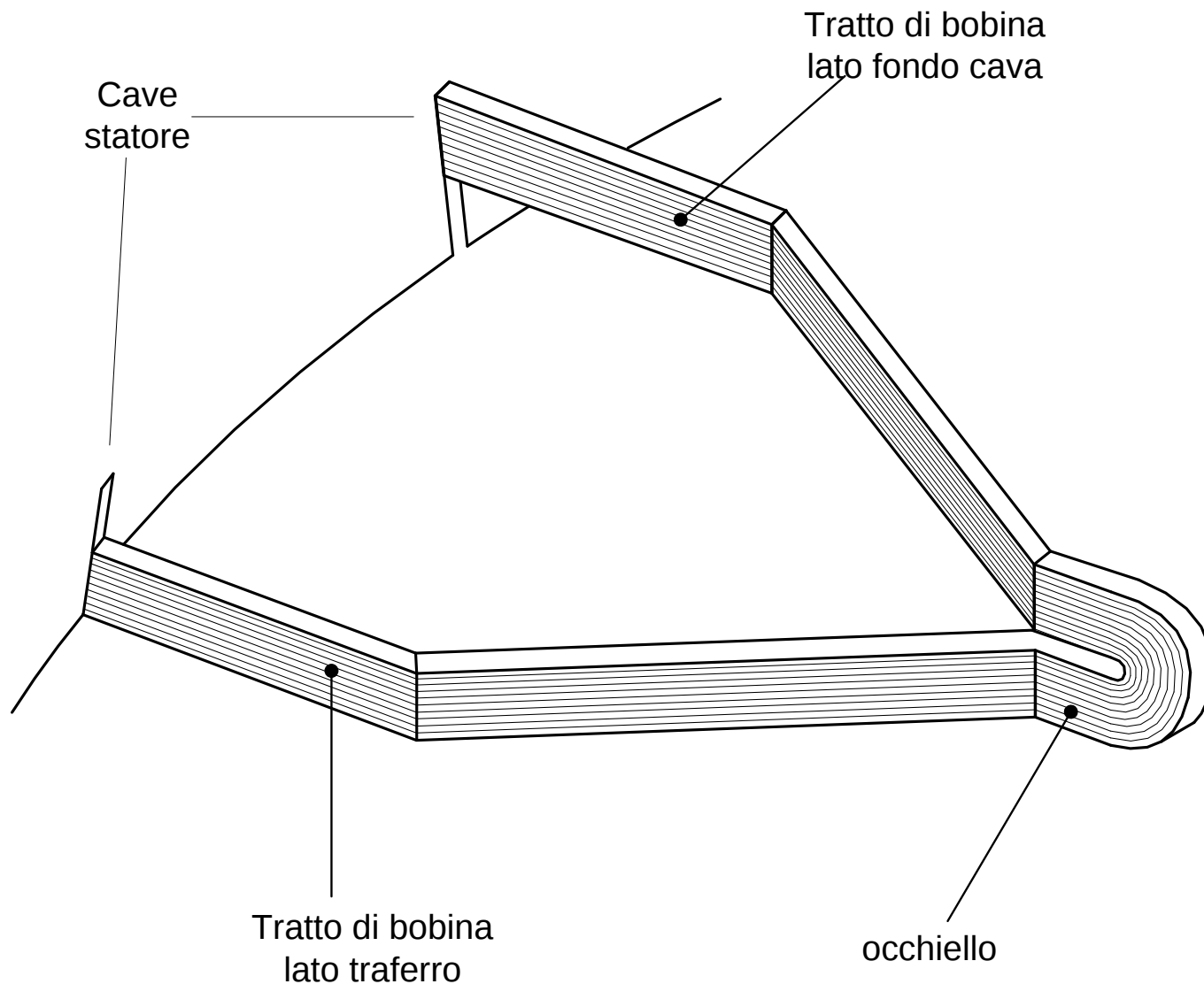
Dopo l'inserimento delle bobine in cava, vengono realizzate le connessioni tra le bobine in modo da realizzare i tre circuiti di fase.

Collegamenti
serie (corti) tra
bobine adiacenti
appartenenti allo
stesso gruppo
polo-fase



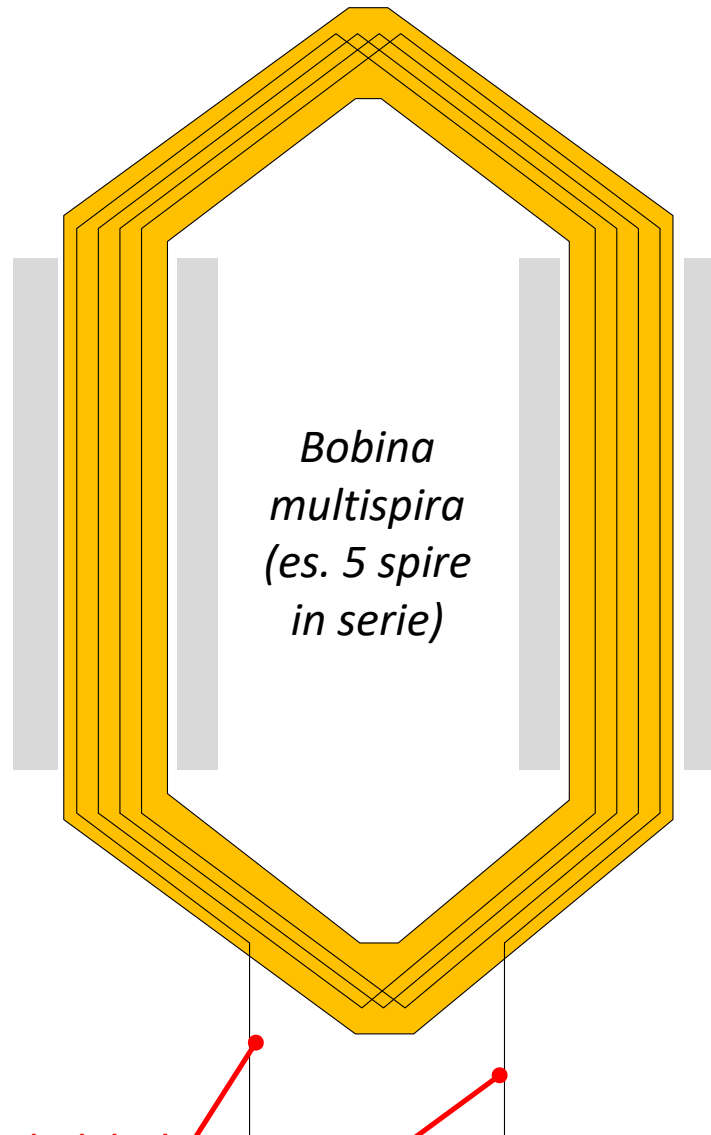
Collegamenti
lunghi (cioè
collegamenti
serie o parallelo
tra gruppi di
bobine, v. dopo)

Modalità di inserimento della bobina in cava per avvolgimenti a doppio strato

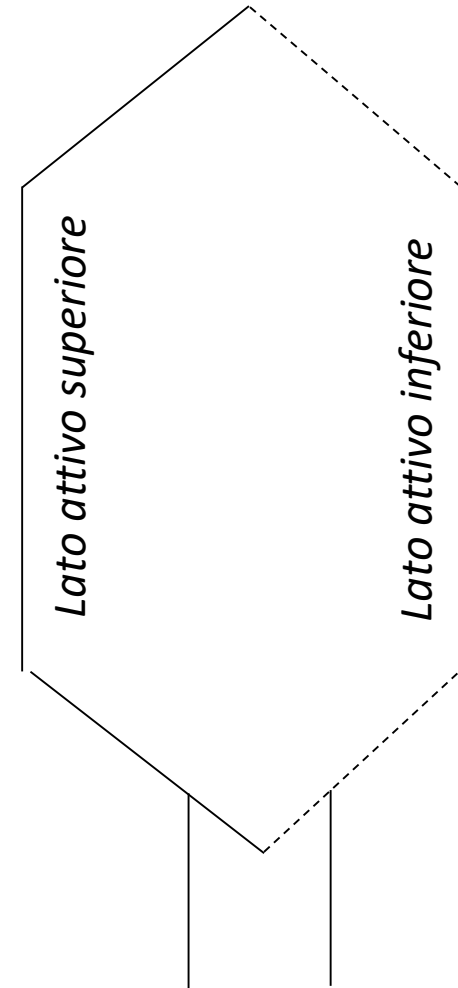


L'uso di avvolgimenti a doppio strato consente di utilizzare bobine tutte uguali senza avere intersezioni o accavallamenti nella regione delle testate.

Struttura della bobina multispira in avvolgimento a doppio strato.



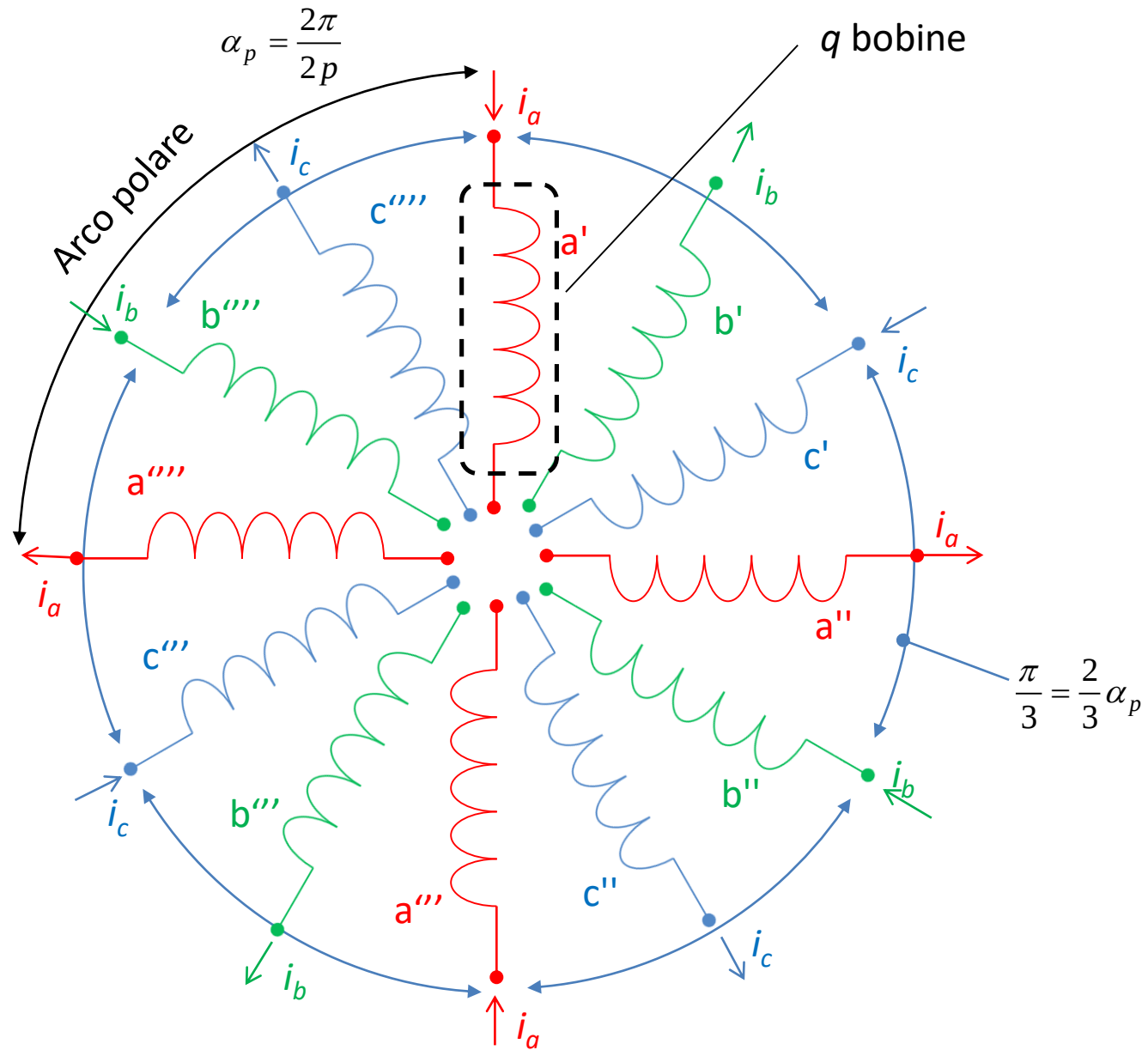
*Rappresentazione
e schematica*



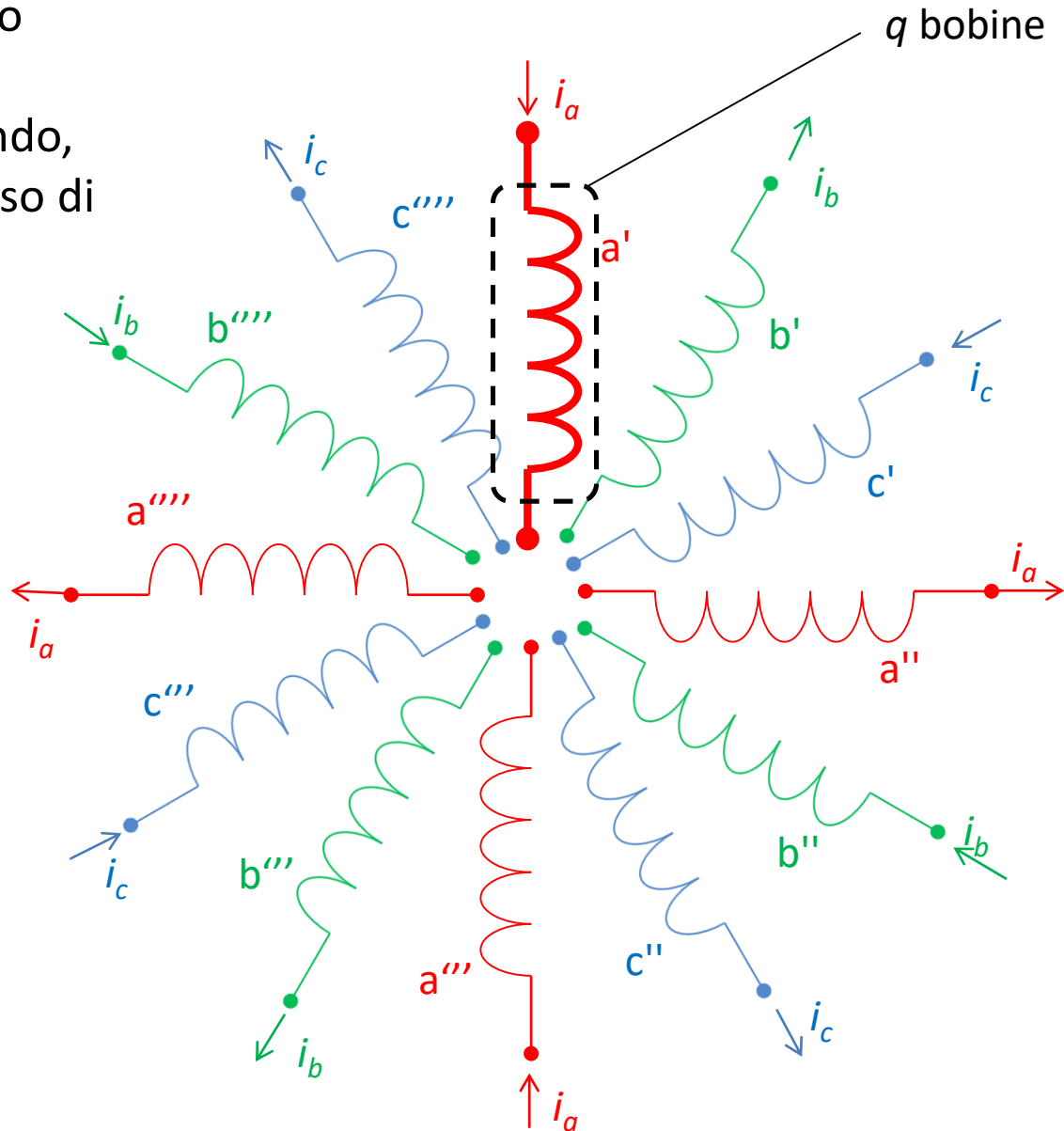
Terminali di bobina

Vediamo nel seguito come le bobine di statore vengono disposte e collegate elettricamente per formare un avvolgimento elettrico trifase.

Consideriamo una macchina con Z cave distatore e p coppie polari e ipotizziamo che ogni gruppo di bobine per polo per fase sia composto da q bobine.



Cominciamo con il realizzare il primo gruppo (a') di q bobine, ipotizzando, ad esempio, il caso di $q=2$.



- q bobine formanti un gruppo polo-fase
- collocate in cave adiacenti
 - sempre connesse tra loro in serie

esempio

$q=2$ bobine per gruppo

$p=2$ coppie polari

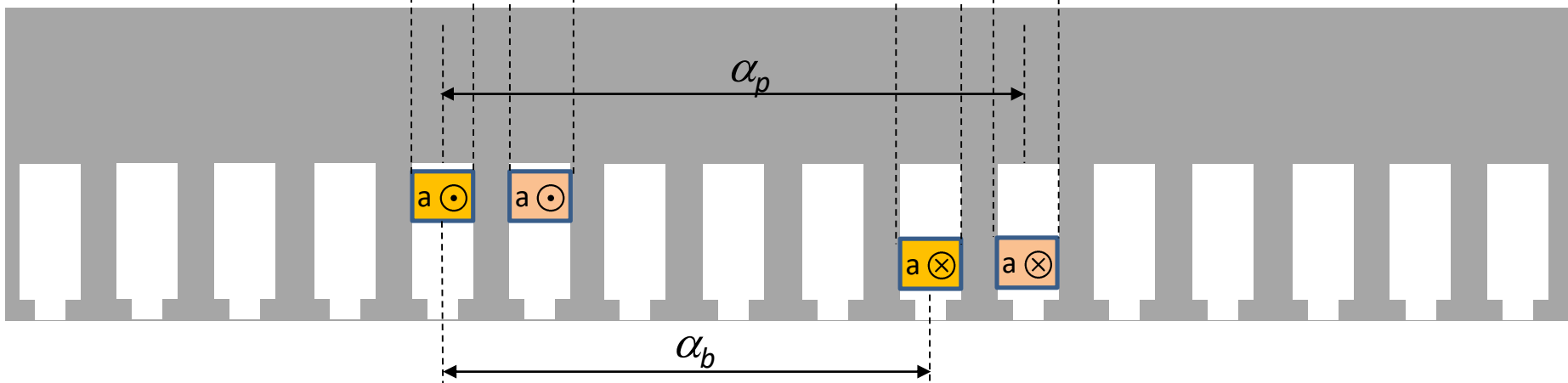
$Z=24$ cave

$Q=3q=6$ cave per polo

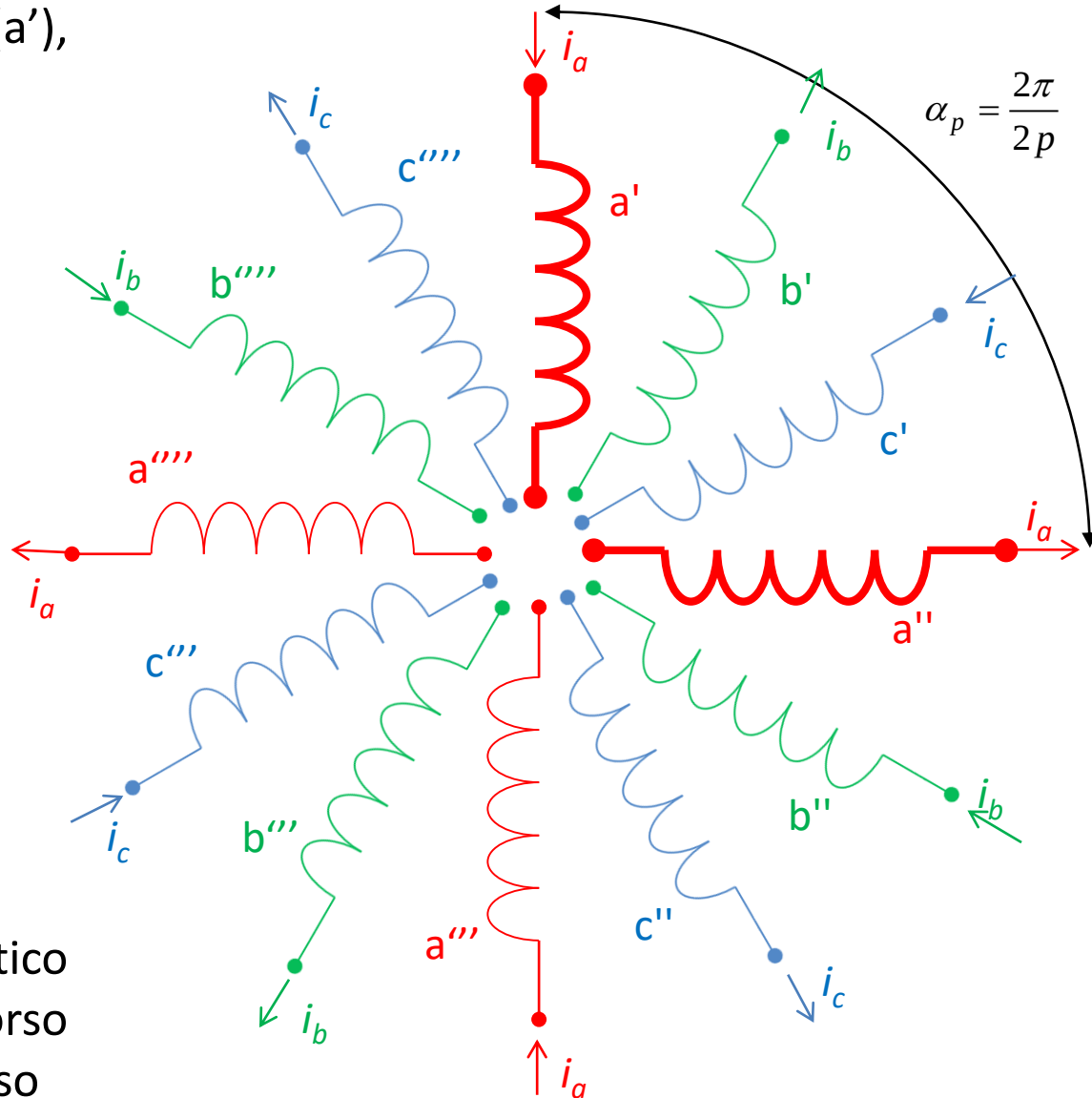
Un passo polare corrisponde a $Q=6$ cave

α_b Passo di bobina

Collegamento serie



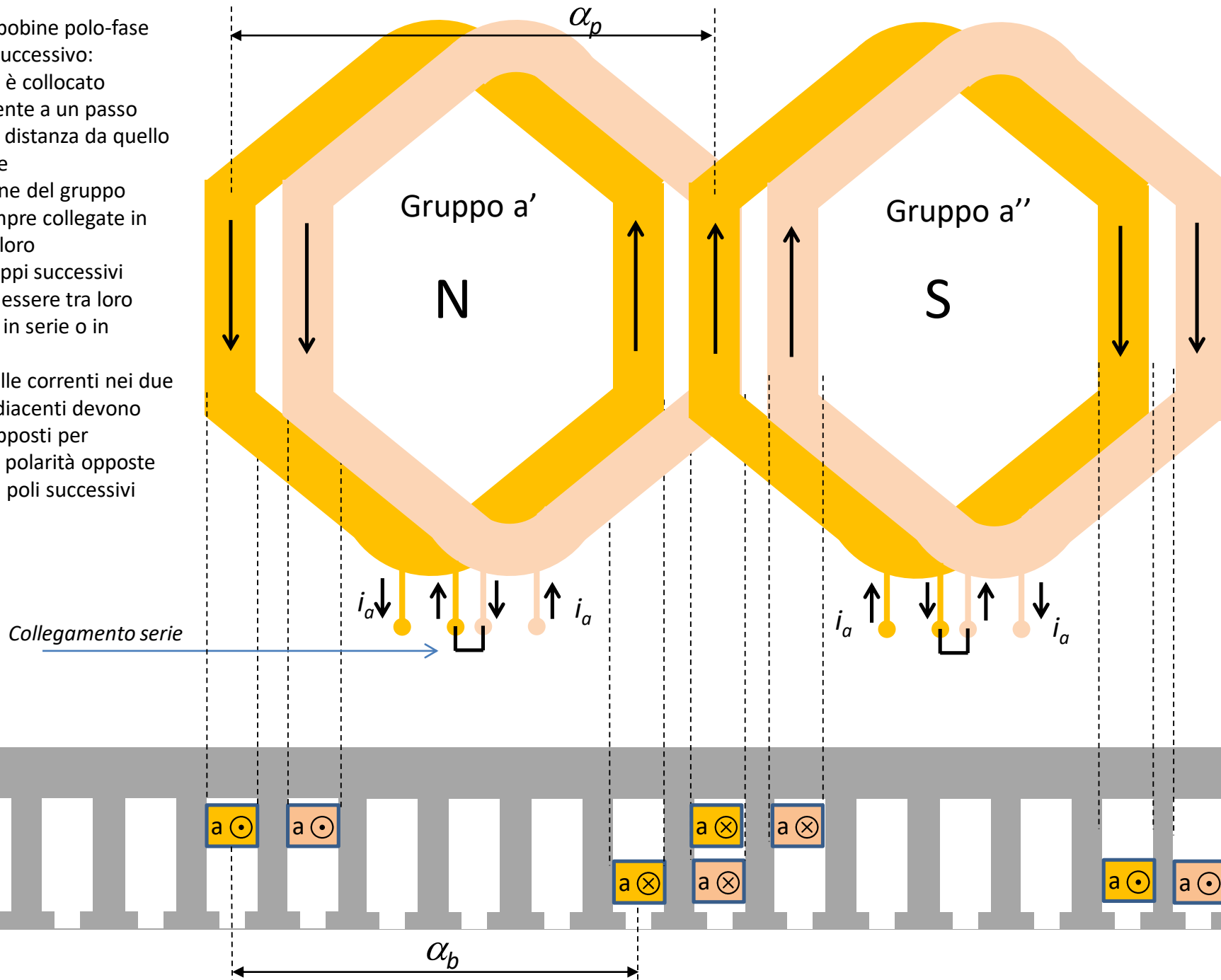
Aggiungiamo quindi il secondo gruppo di bobine polo-fase (a'), sfasato rispetto al primo di un passo polare α_p .



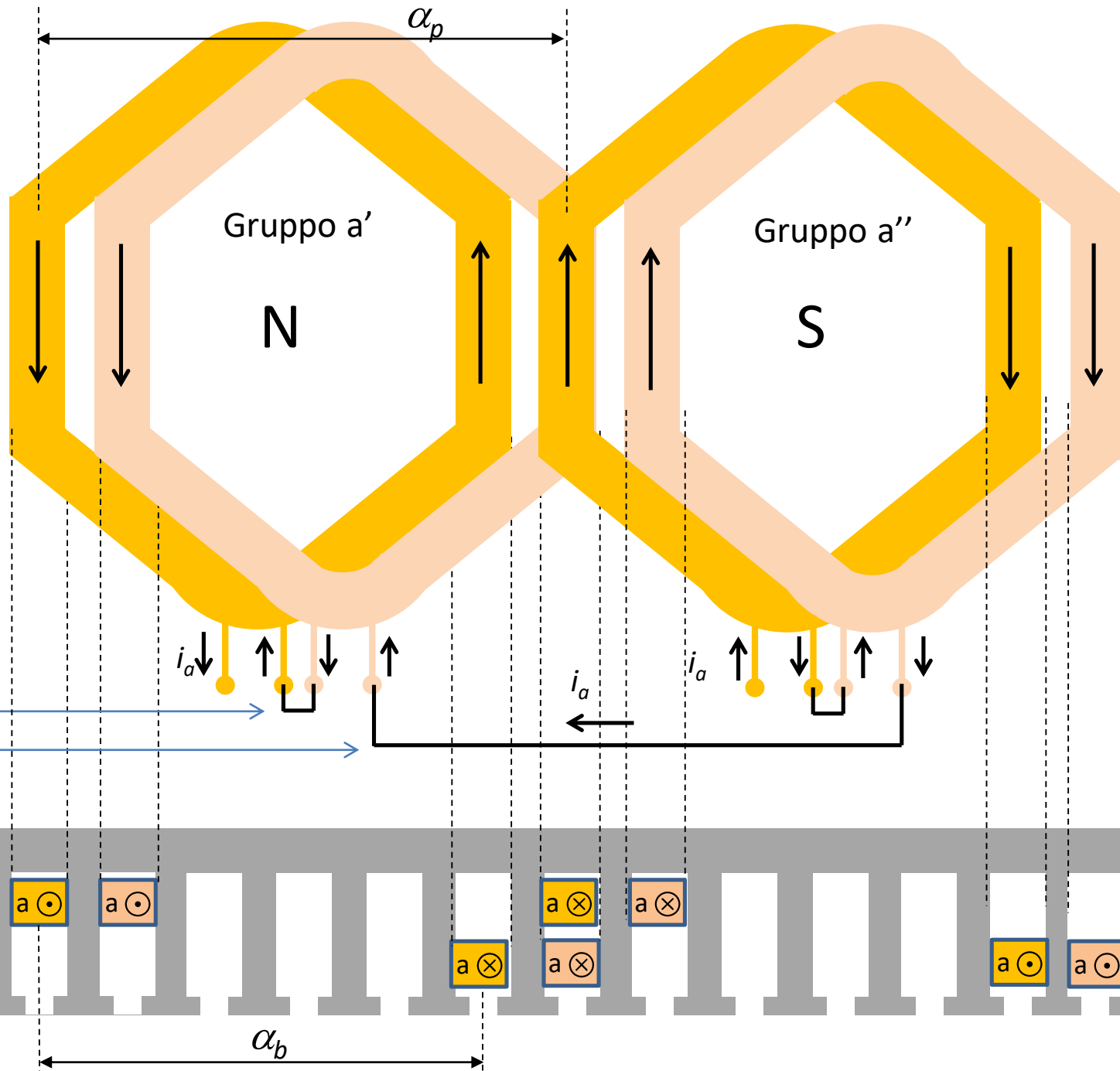
Il secondo gruppo dovrà essere identico al primo ma percorso da corrente in verso opposto.

Gruppo di bobine polo-fase per il polo successivo:

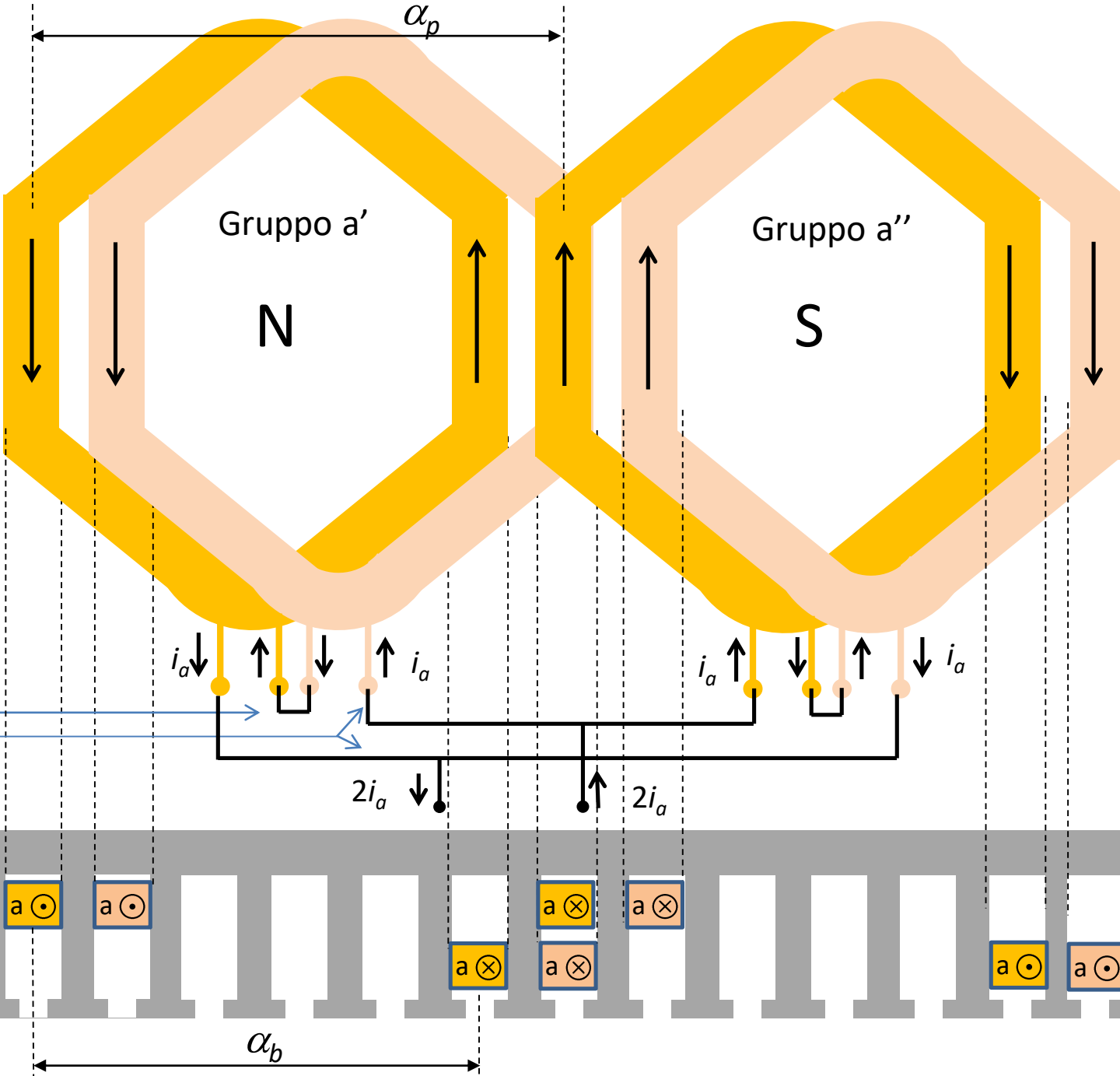
- Il gruppo è collocato esattamente a un passo polare di distanza da quello adiacente
- le q bobine del gruppo sono sempre collegate in serie tra loro
- I due gruppi successivi possono essere tra loro connessi in serie o in parallelo
- I versi delle correnti nei due gruppi adiacenti devono essere opposti per generare polarità opposte (N e S) in poli successivi



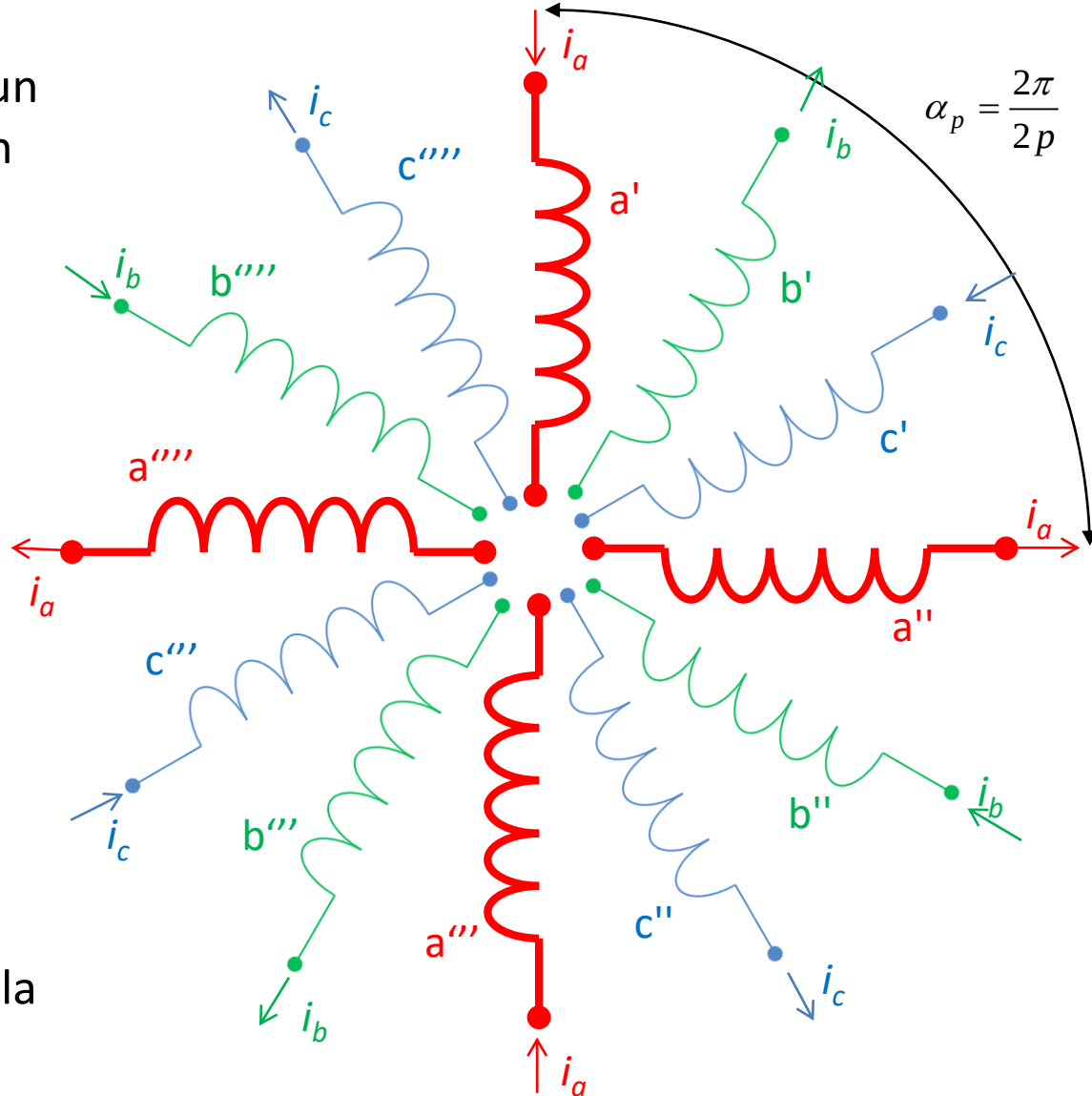
Esempio di collegamento serie tra gruppi adiacenti



Esempio di collegamento parallelo tra gruppi adiacenti

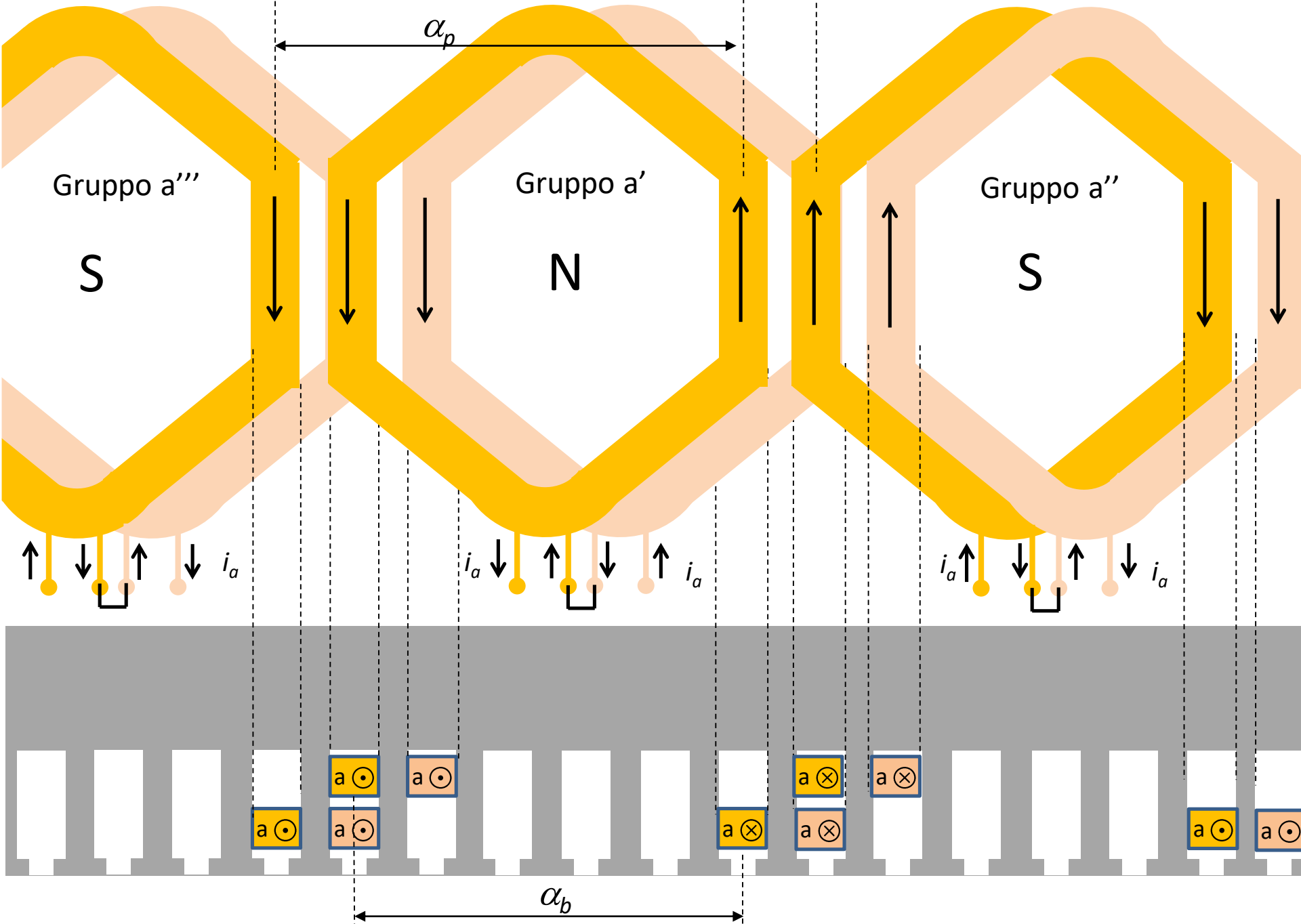


Aggiungiamo i
rimandenti gruppi
polo-fase, sempre
sfasati tra loro di un
passo polare e con
versi alterni della
corrente.



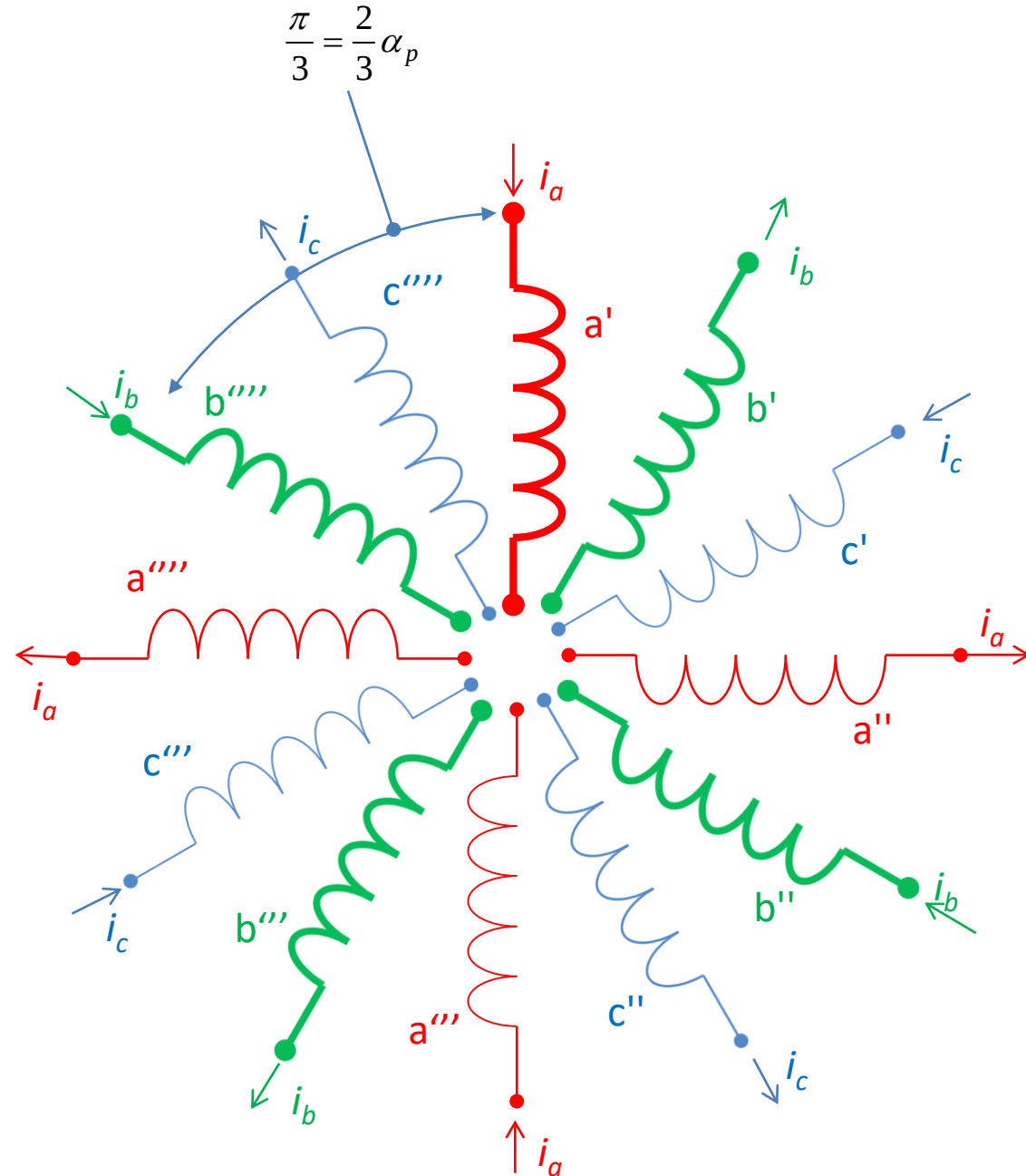
In questo modo
viene completata la
fase a.

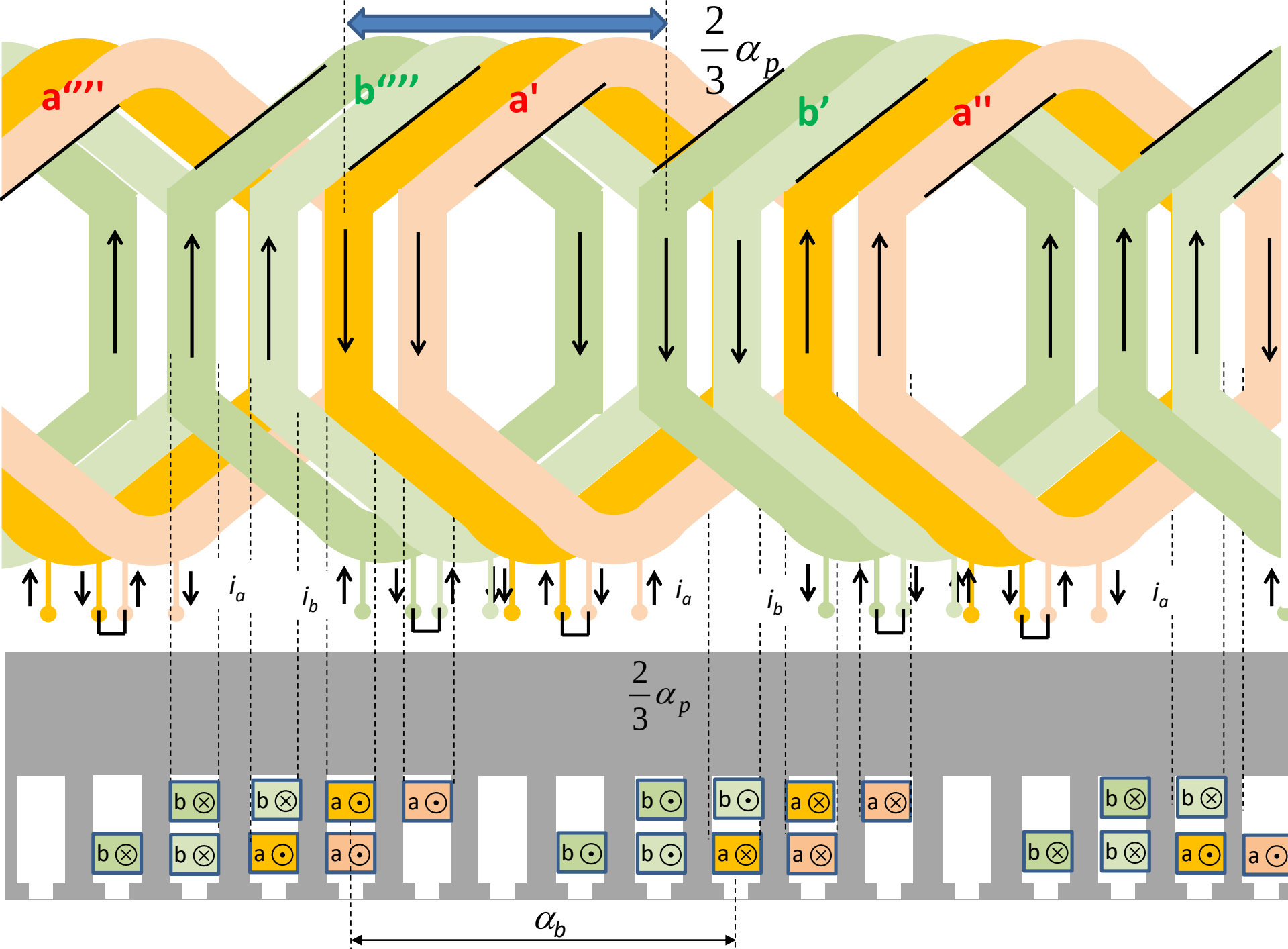
Completamento della fase «a» con aggiunta degli altri gruppi polo-fase (sempre con collegamento serie o parallelo tra gruppi)



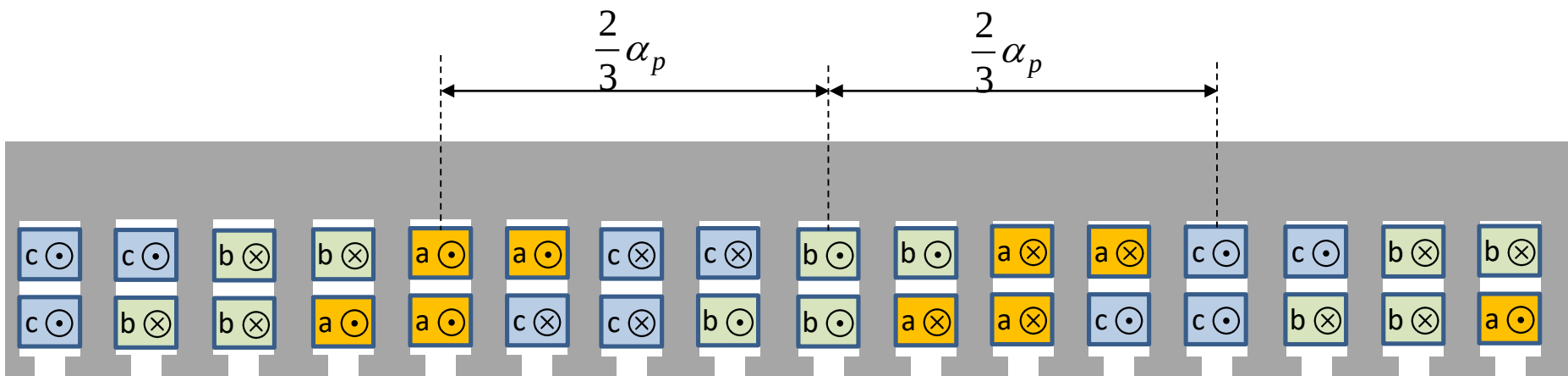
Realizziamo ora la fase «b».

Essa è identica alla fase «a» ma sfasata nello spazio di $\frac{2}{3}$ del passo polare.





Infine, realizziamo la fase «c». Essa è identica alla fase «b» ma sfasata nello spazio di $\frac{2}{3}$ del passo polare. In questo modo abbiamo concluso la realizzazione dell'avvolgimento, che per semplicità mostriamo sotto solo in sezione trasversale.

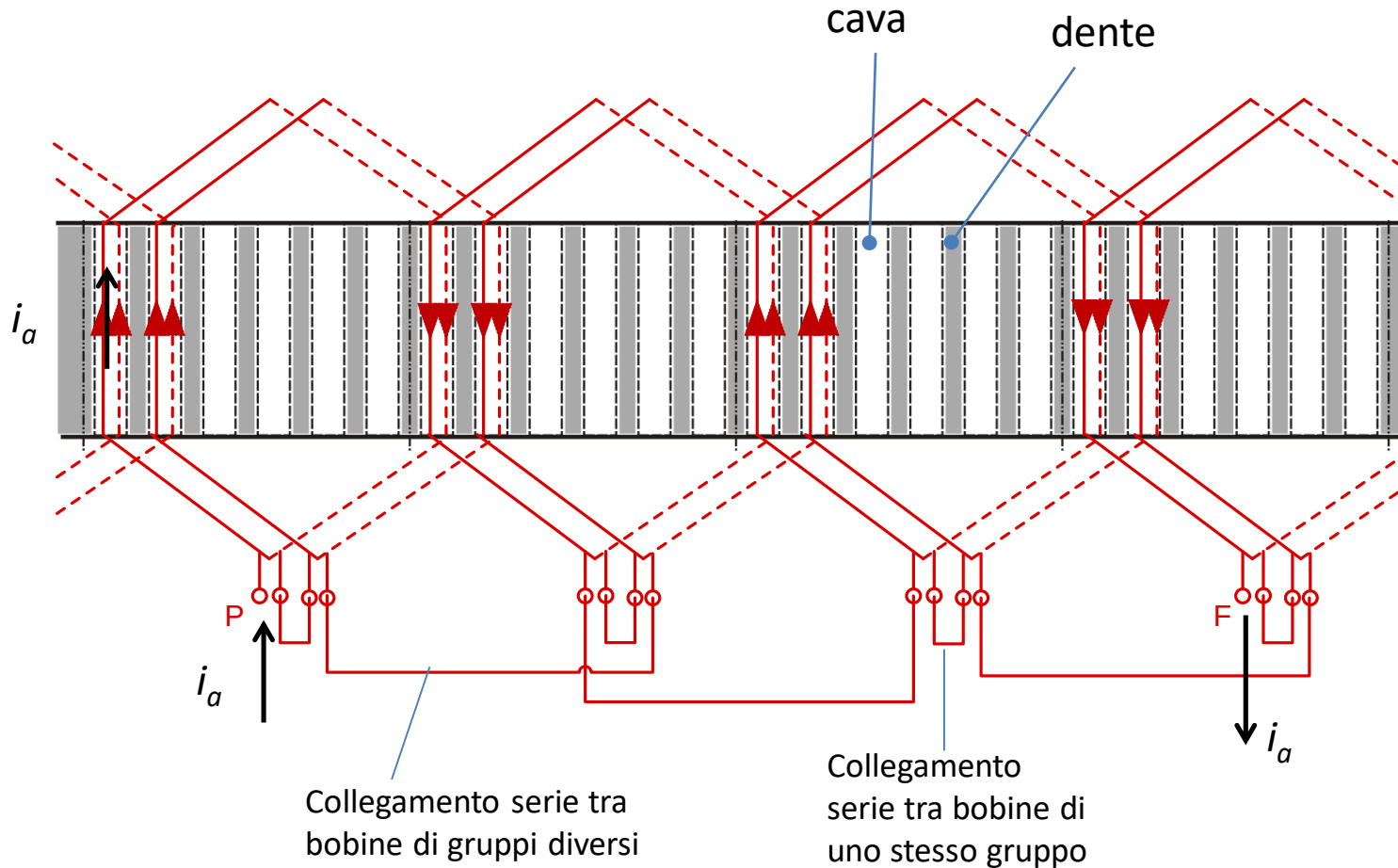


Schemi di avvolgimento

La struttura di avvolgimento viene rappresentata mediante un opportuno «schema di avvolgimento» che permette di mettere in evidenza i collegamenti tra gruppi di bobine di una stessa fase.

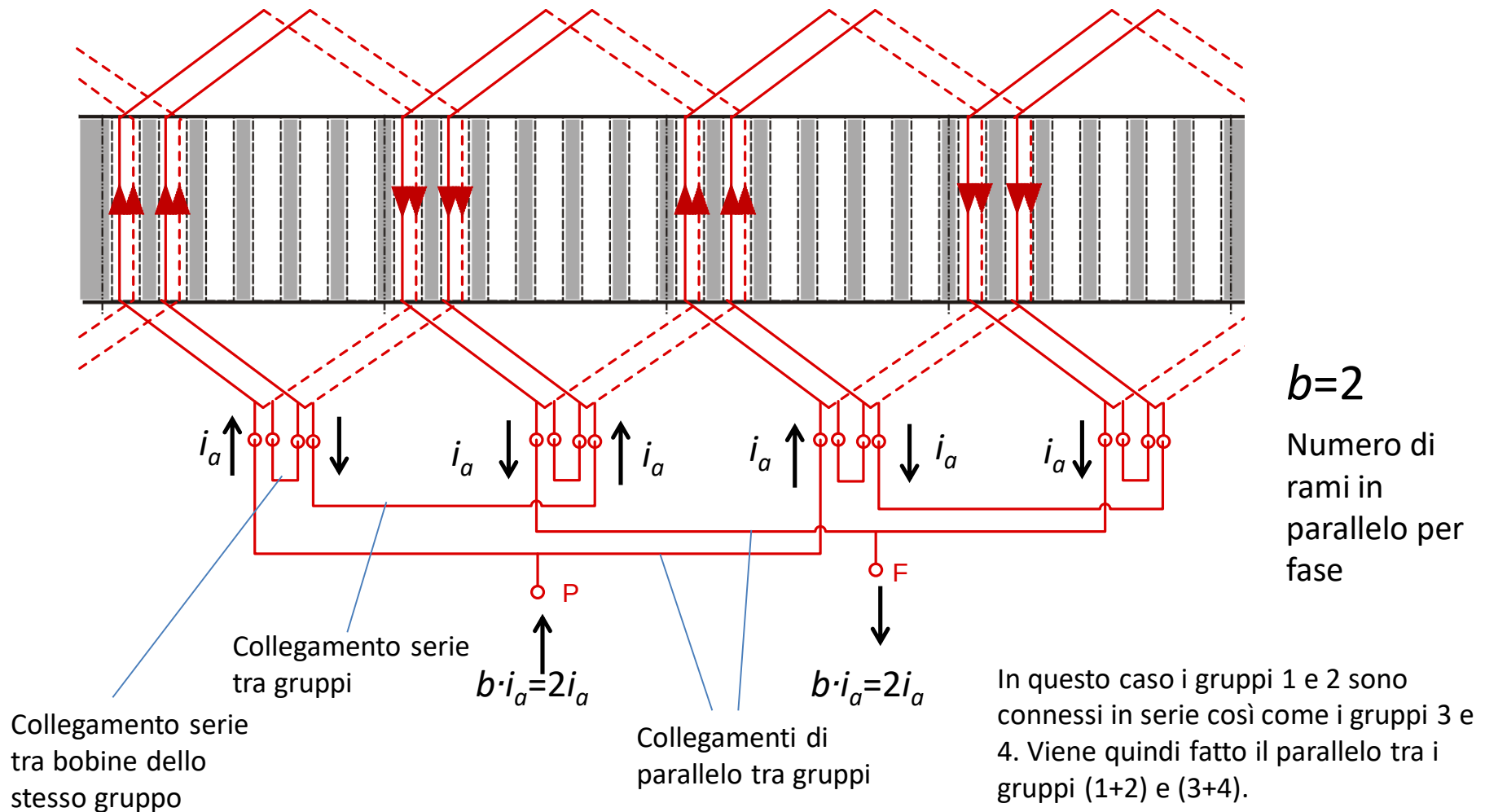
Proprio perchè le tre fasi sono identiche tra loro a meno dello sfasamento di $\frac{2}{3}$ del passo polare, nello schema di avvolgimento si rappresenta, per semplicità, solo una delle tre fasi.

Esempio: schema di avvolgimento per macchina a quattro poli ($p=2$), con $Z=24$ cave e tutti i guppi polo-fase connessi in serie. La corrente che entra nella fase i_a è uguale a quella che percorre tutti i conduttori della fase stessa.



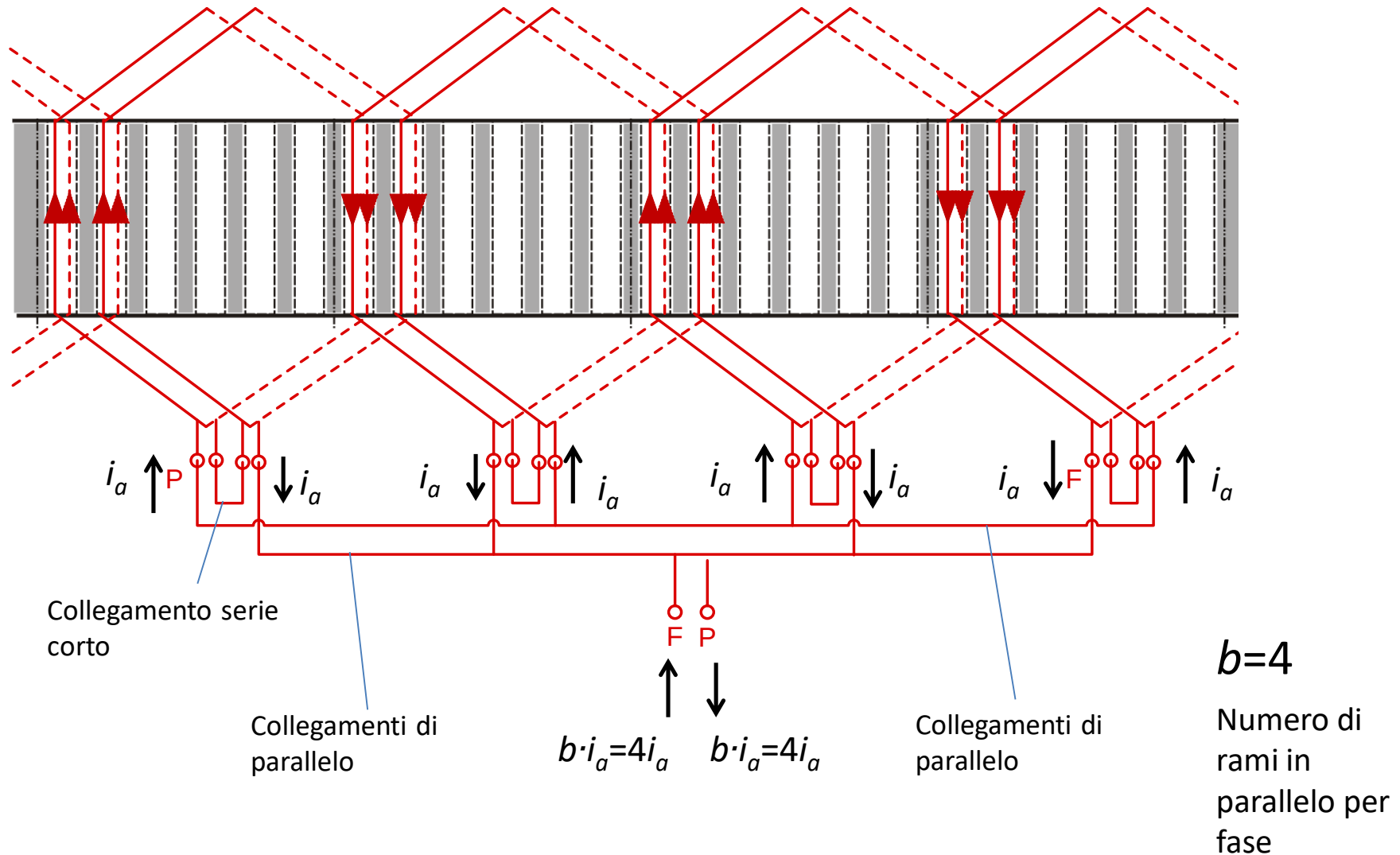
Come visto in precedenza, il tratto continuo e il tratteggio rappresentano rispettivamente i due strati dell'avvolgimento.

Esempio: schema di avvolgimento per macchina a quattro poli ($p=2$), con $Z=24$ cave. In questo caso, ogni fase comprende $b=2$ rami in parallelo. Quindi, la corrente che entra nella fase è $2i_a = b \cdot i_a$ essendo i_a la corrente che percorre i singoli conduttori della fase.



Esempio: schema di avvolgimento per macchina a quattro poli ($p=2$), con $Z=24$ cave. In questo caso, ogni fase comprende $b=4$ rami in parallelo, cioè tutti i quattro gruppi di bobine sono connessi in parallelo.

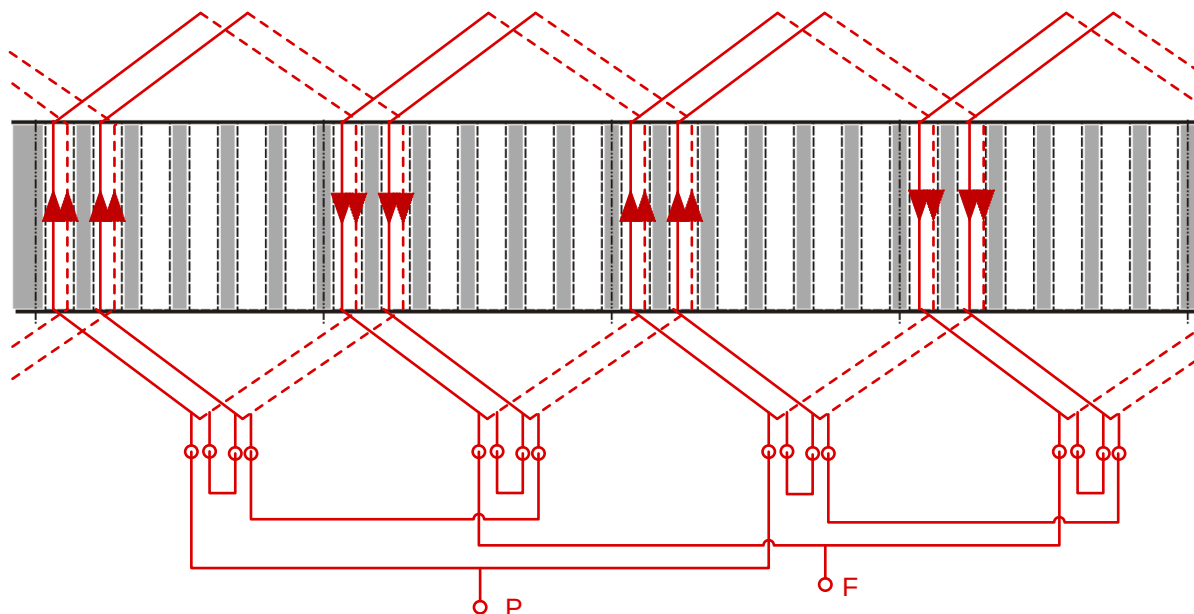
Quindi, la corrente che entra nella fase è $4i_a = b \cdot i_a$ essendo i_a la corrente che percorre i singoli conduttori della fase.



Definizioni e relazioni algebriche elementari per avvolgimenti trifase

Consideriamo una macchina a $2p$ poli con uno statore dotato di Z cave ed avvolgimento a doppio strato.

Poichè ogni bobina consta di due lati attivi e ogni cava contiene due lati attivi, è evidente che il numero di bobine coincide con il numero di cave.



Esempio

Avvolgimento con $Z=24$ cave. Il diagramma mostra le bobine di una fase che sono 8. Essendo le altre fasi identiche, costante anch'esse di 8 bobine. Pertanto il numero totale di bobine è $Z=8 \times 3=24$.

Q = Numero di bobine per polo = numero di cave per polo

$$Q = \frac{Z}{2p}$$

q = Numero di bobine per polo per fase = numero di cave per polo per fase $q = \frac{Q}{3} = \frac{Z}{6p}$

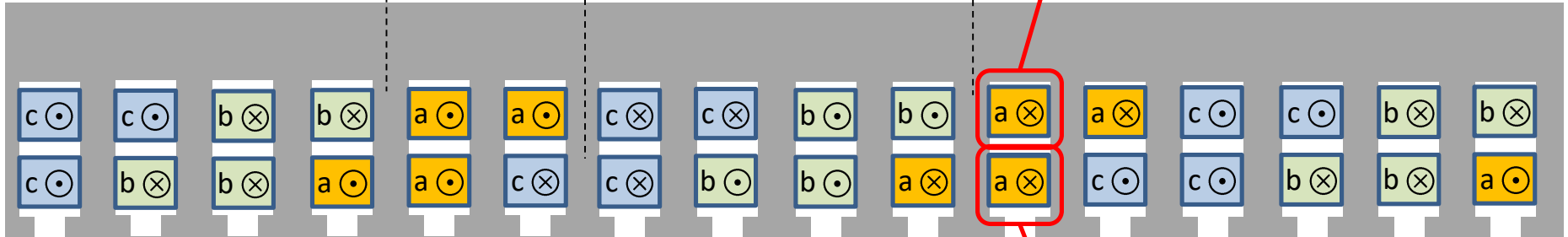
da cui il numero di cave Z si può anche esprimere come $Z = 6pq$ (A)

Esempio

$Q = 6$ cave per polo

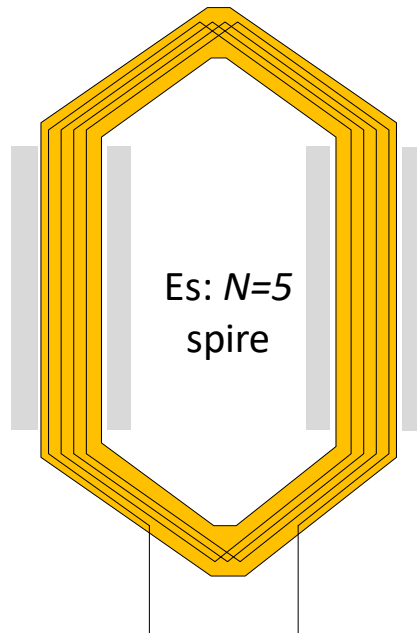
$q = 2$ cave per polo per fase

N conduttori attivi



N = numero di spire per bobina

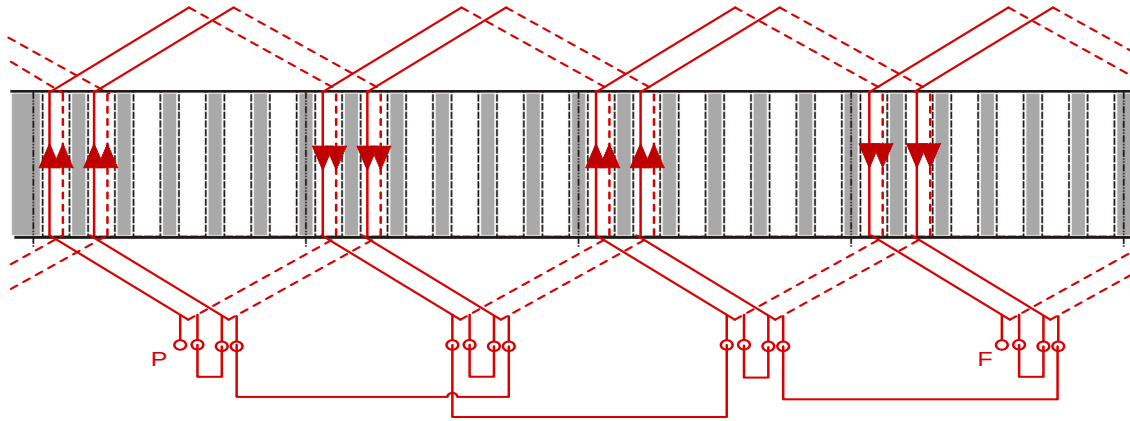
$2N$ = numero di conduttori attivi per bobina



N conduttori attivi

$2N$ = numero di conduttori attivi per cava (N nello strato superiore, N in quello inferiore)

b = numero di rami in parallelo per fase (« b » da «branch»=«ramo»)

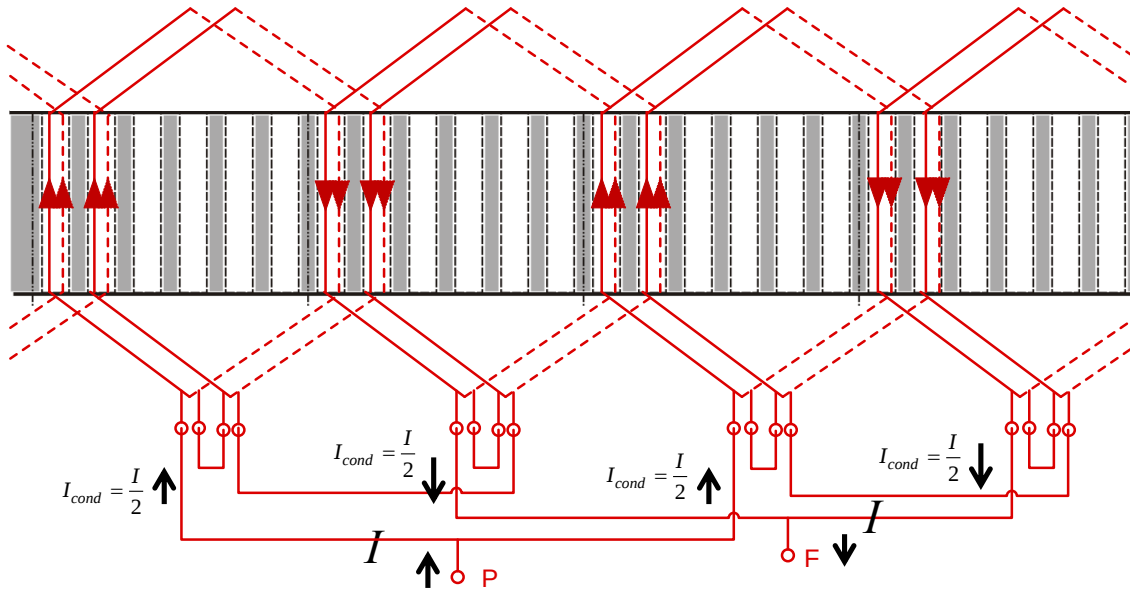


Esempi:

Tutte le bobine della fase sono connesse in serie, quindi

$$b = 1$$

In ogni spira, ossia in ogni conduttore, passa tutta la corrente di fase.



Ogni fase comprende due rami in parallelo

$$b = 2$$

In ogni spira (ovvero in ogni conduttore) passa metà corrente di fase

I = corrente di fase

I_{cond} = corrente di che attraversa ogni singola spira o conduttore attivo

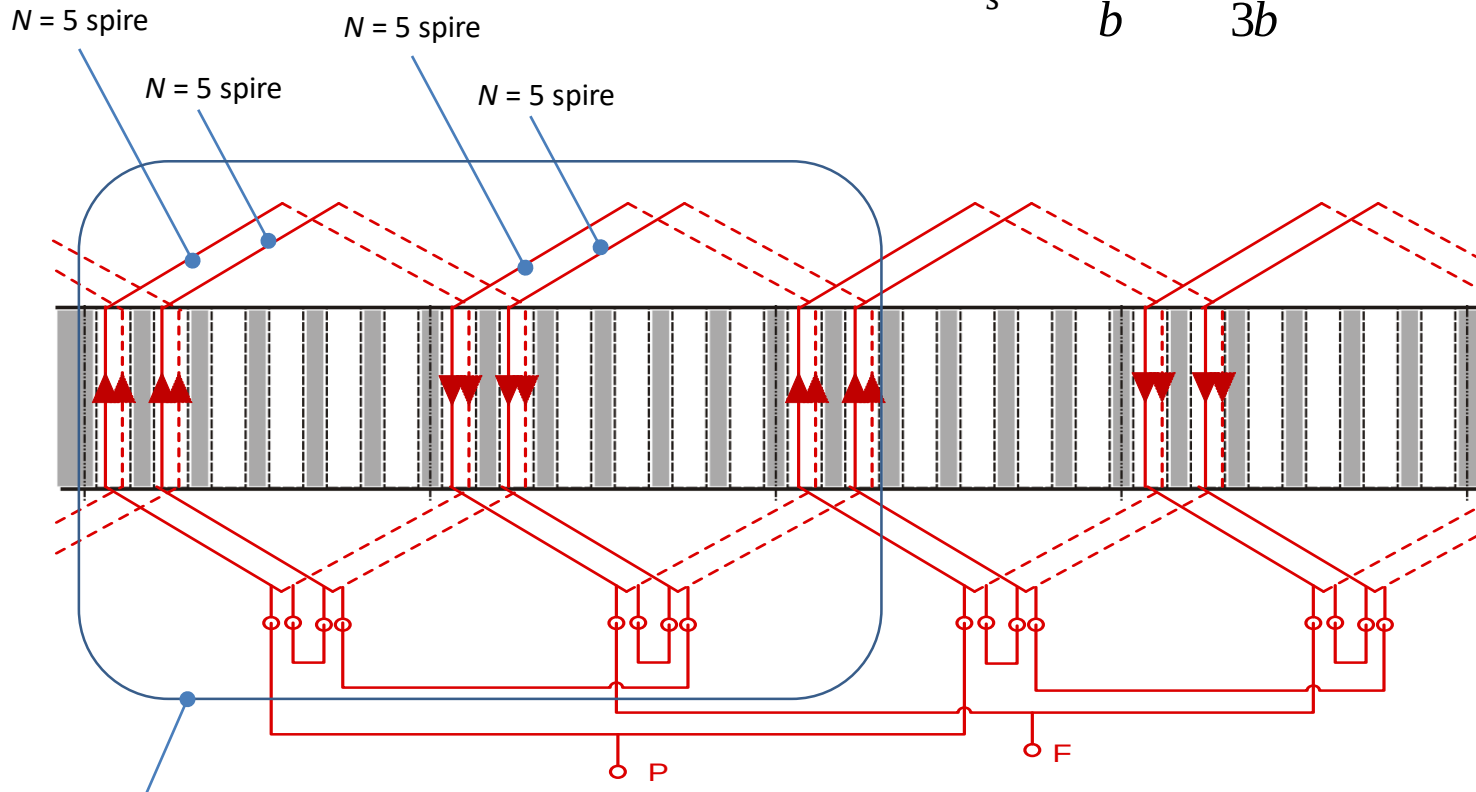
$$I_{cond} = \frac{I}{b}$$

N_s = numero di spire in serie per fase = numero di spire in serie che costituiscono ciascun ramo in parallelo

Numero di bobine per fase

Numero di spire per bobina

$$N_s = \frac{\frac{Z}{3} N}{b} = \frac{ZN}{3b} \quad (B)$$



Un ramo dei due in parallelo, comprende

$$N_s = \frac{\frac{Z}{3} N}{b} = \frac{\frac{24}{3} 5}{2} = 20 \quad \text{spire in serie}$$

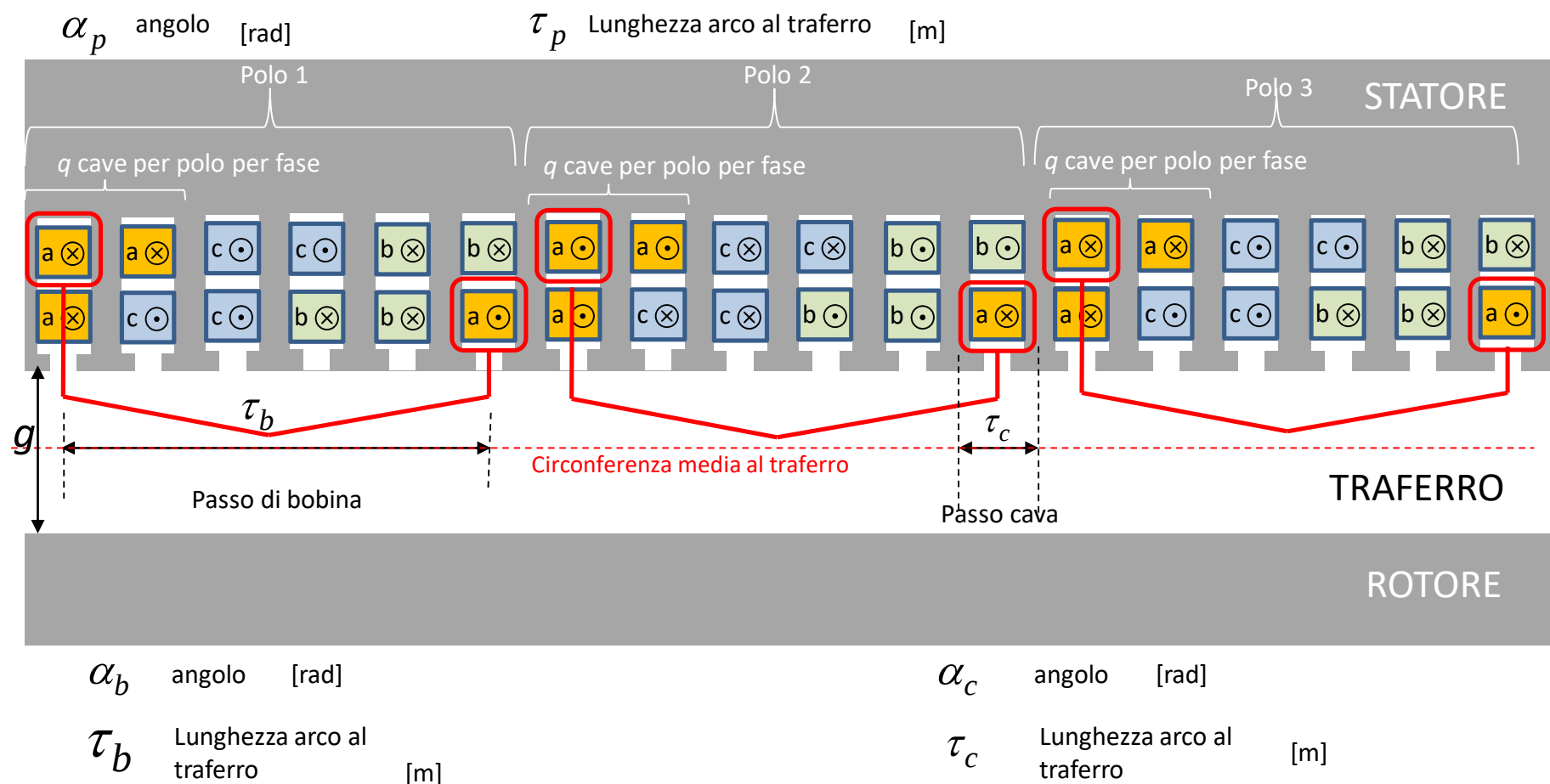
In particolare, dalla (A) e dalla (B) si ottiene:

$$N_s = \frac{6pqN}{3b} = \frac{2pqN}{b} \longrightarrow N = \frac{b}{2pq} N_s \quad (C)$$

L'espressione (C) verrà usata oltre.

Campo al traferro prodotto da una singola bobina di fase per polo

Cominciamo con il considerare il campo prodotto nel trasferro della macchina dalle prime bobine di ogni gruppo polo-fase (evidenziate in rosso nella figura sotto.).

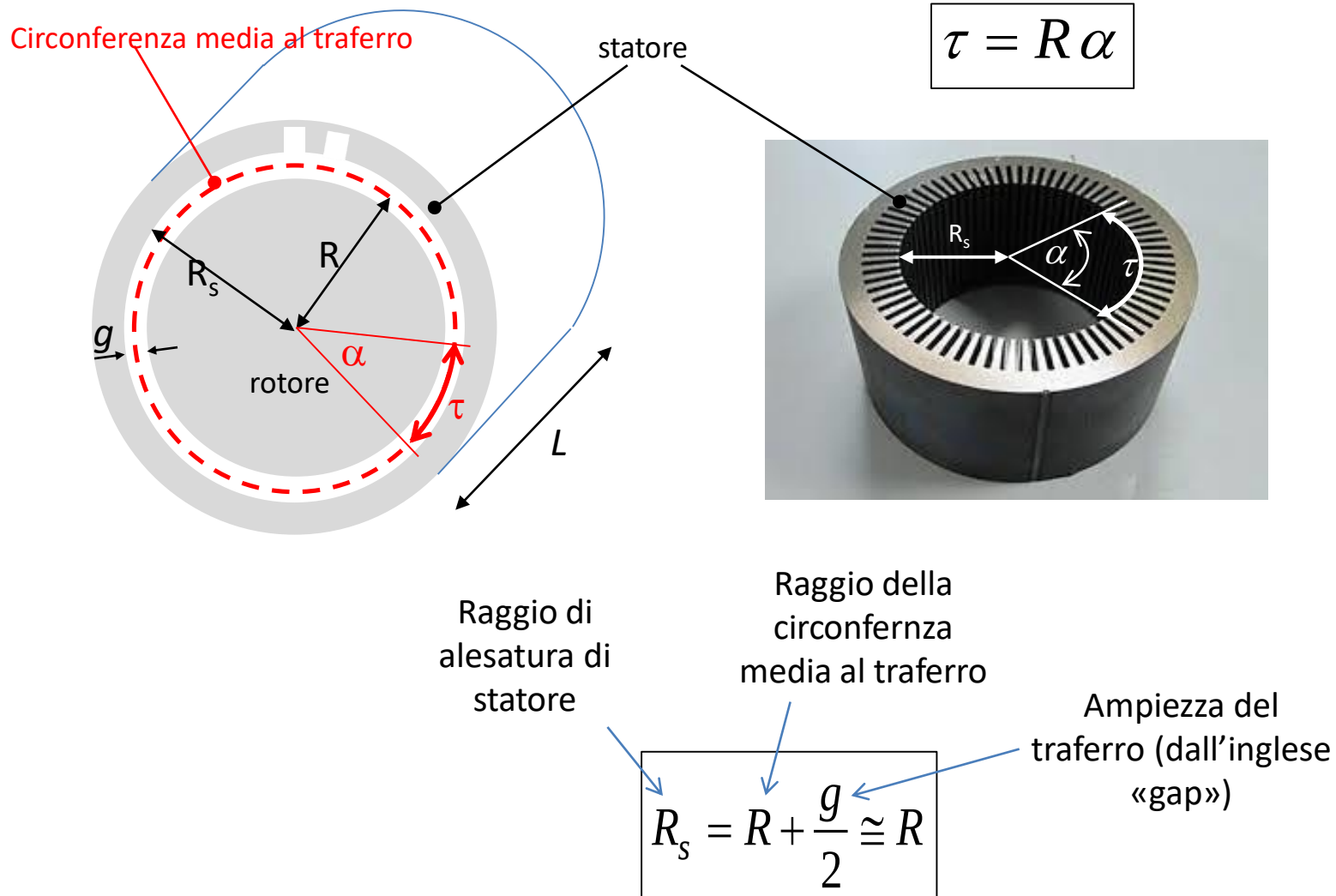


Il traferro è la zona d'aria (a forma di corona circolare) compresa tra statore e rotore.

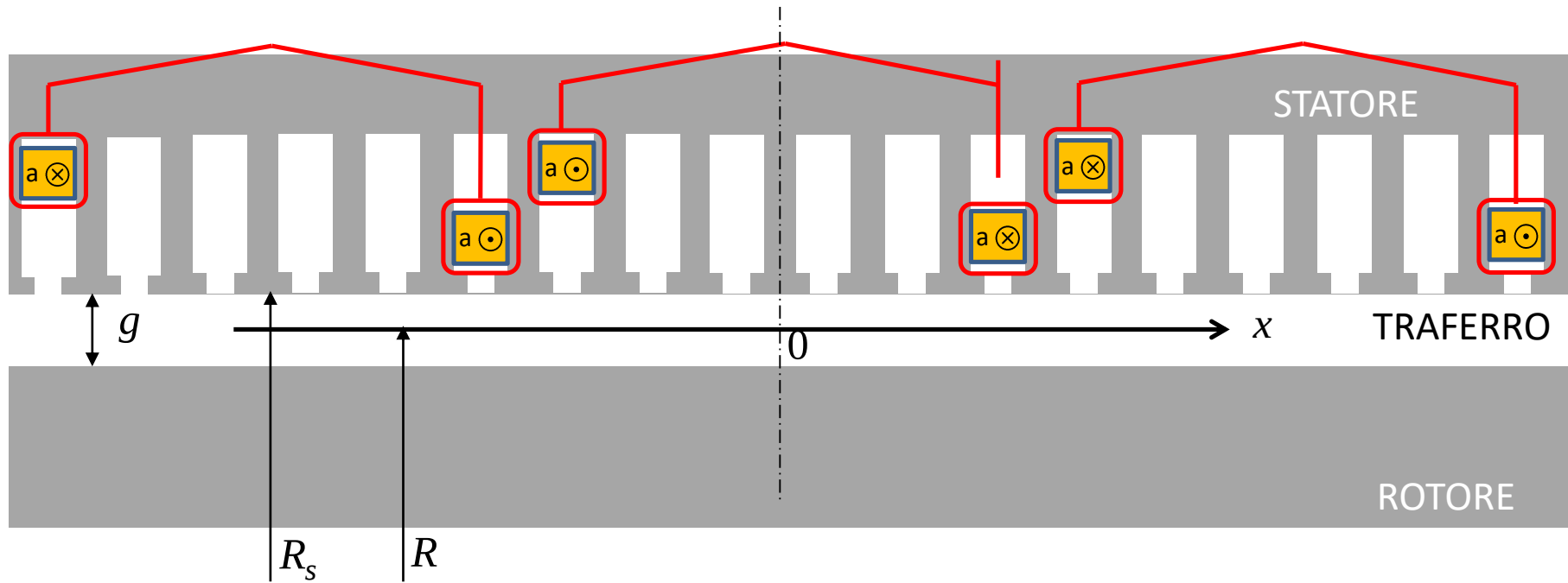
Ampiezze del polo, della apertura di bobina e del passo cava si possono misurare come angoli (α) o lunghezze di archi lungo la circonferenza media al traferro (τ).

Gli archi (di ampiezza τ) sono misurati lungo la circonferenza media al traferro, avente raggio R approssimabile con il raggio di alesatura (raggio interno) dello statore.

Relazione tra angoli (α) e archi (τ) lungo la circonferenza media al traferro:



Consideriamo la coordinata x lungo la circonferenza al traferro, fissando l'origine sull'asse di una bobina.



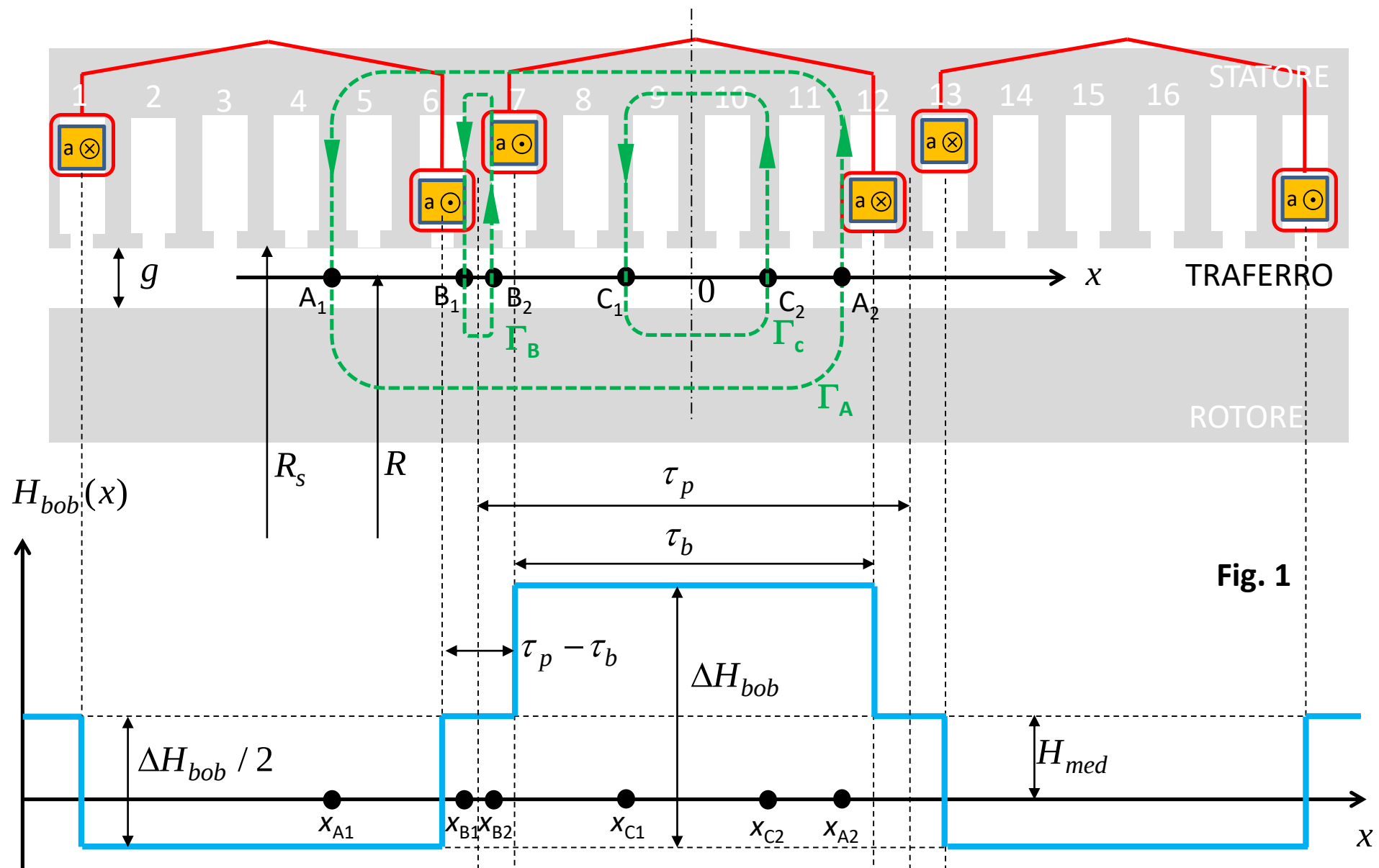
Ipotesi:

- **Traferro uniforme di ampiezza g**
- **Si trascura l'effetto delle aperture di cava, cioè si considerano le superfici affacciate di statore e rotore come due superfici cilindriche lisce concentriche.**
- **Si assume infinita la permeabilità dei nuclei magnetici di statore e rotore.**

In base a tali ipotesi, l'induzione al traferro B (e quindi il campo magnetico H) al traferro ha solo componente radiale, cioè ortogonale a x , in virtù delle proprietà del campo magnetico nel passaggio tra aria e mezzi a permeabilità magnetica tendente all'infinito.

Detta H_{bob} tale componente radiale di campo al traferro, si vuole determinare $H_{bob}(x)$.

Dimostriamo che $H_{bob}(x)$ possiede la forma d'onda mostrata sotto (Fig. 1).



Si nota che una volta determinato il campo magnetico $H_{bob}(x)$, resta automaticamente determinata anche l'induzione $B_{bob}(x)$ poichè, essendo il traferro d'aria:

$$B_{bob}(x) = \mu_0 H_{bob}(x)$$

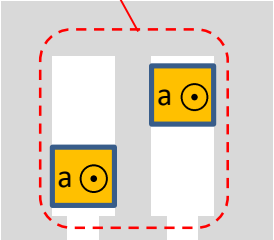
Allo scopo di dimostrare che $H_{bob}(x)$ ha l'andamento di fig. 1, applichiamo il teorema della circuitazione di Ampere ai tre percorsi chiusi orientati Γ_A , Γ_B , Γ_C , che intersecano la circonferenza al traferro rispettivamente nelle coppie di punti di coordinate x_{A1} e x_{A2} , x_{B1} e x_{B2} , x_{C1} e x_{C2} tali che: A1 è tra la cave 1 e 6; A2 è tra la cave 7 e la 12; B1 e B2 sono tra la cave 6 e 7; C1 e C2 sono tra le cave 7 e 12.

Si ricorda che, nell'ipotesi di permeabilità del nucleo magnetico tendente all'infinito, il campo H nel nucleo è nullo, mentre è diverso da zero solo nel traferro, quindi:

$$\oint_{\Gamma_A} \mathbf{H}_{bob} \cdot d\mathbf{s} = [H_{bob}(x_{A2}) - H_{bob}(x_{A1})]g \quad \oint_{\Gamma_B} \mathbf{H}_{bob} \cdot d\mathbf{s} = [H_{bob}(x_{B2}) - H_{bob}(x_{B1})]g \quad \oint_{\Gamma_C} \mathbf{H}_{bob} \cdot d\mathbf{s} = [H_{bob}(x_{C2}) - H_{bob}(x_{C1})]g$$

Dal teorema della circuitazione di Ampere si ha:

$$[H_{bob}(x_{A2}) - H_{bob}(x_{A1})]g = 2N \frac{i}{b} = g\Delta H \quad (1)$$

Diagramma schematico del traferro con bobine: 

Etichette per la formula (1):

- Numero di strati (punta alla '2')
- Corrente di fase (punta alla 'i')
- Numero di rami in parallelo per fase (punta alla 'b')
- Numero di spire per bobina (punta alla 'N')

$$[H_{bob}(x_{B2}) - H_{bob}(x_{B1})]g = 0 \Rightarrow H_{bob}(x_{B2}) = H_{bob}(x_{B1}) \quad (2)$$

$$[H_{bob}(x_{C2}) - H_{bob}(x_{C1})]g = 0 \Rightarrow H_{bob}(x_{C2}) = H_{bob}(x_{C1}) \quad (3)$$

Analoghe equazioni si possono scrivere per gli altri poli.

E' facile vedere che le equazioni (1)-(3) determinano univocamente il diagramma di $H_{bob}(x)$ riportato in Fig. 1, con:

$$\Delta H_{bob} = H_{bob}(x_{A2}) - H_{bob}(x_{A1}) = \frac{2N i}{b g} \quad (3a)$$

Resta invece indeterminato il valore medio del campo magnetico ΔH_{med} .

Si può dimostrare che $\Delta H_{med}=0$ applicando il principio per cui il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo. Si prenda come superficie chiusa la superficie cilindrica Σ avente per sezione la circonferenza media al traferro e come altezza la lunghezza assiale di macchina L (Fig. 2).

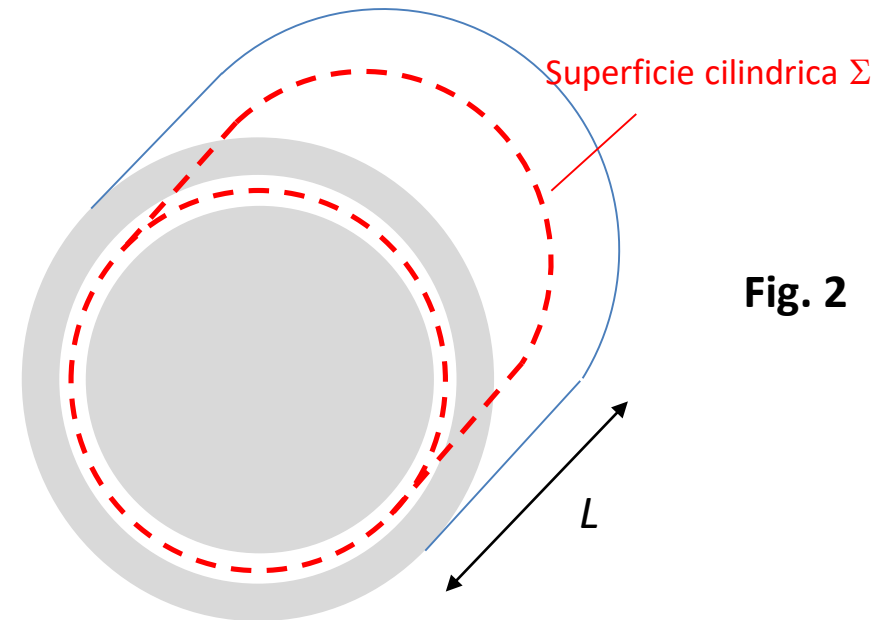


Fig. 2

Considerando che, come osservato, l'induzione al traferro è puramente radiale, il flusso dell'induzione attraverso Σ è:

$$L \int_0^{2\pi R} B_{bob}(x) dx = \mu_0 L \int_0^{2\pi R} H_{bob}(x) dx = 2\pi R \mu_0 L H_{med} = 0 \Rightarrow H_{med} = 0 \quad (4)$$

Di conseguenza, il campo $H_{bob}(x)$ ha l'andamento (a valore medio nullo e periodico con periodo $2\tau_p$) mostrato sotto (Fig. 3):

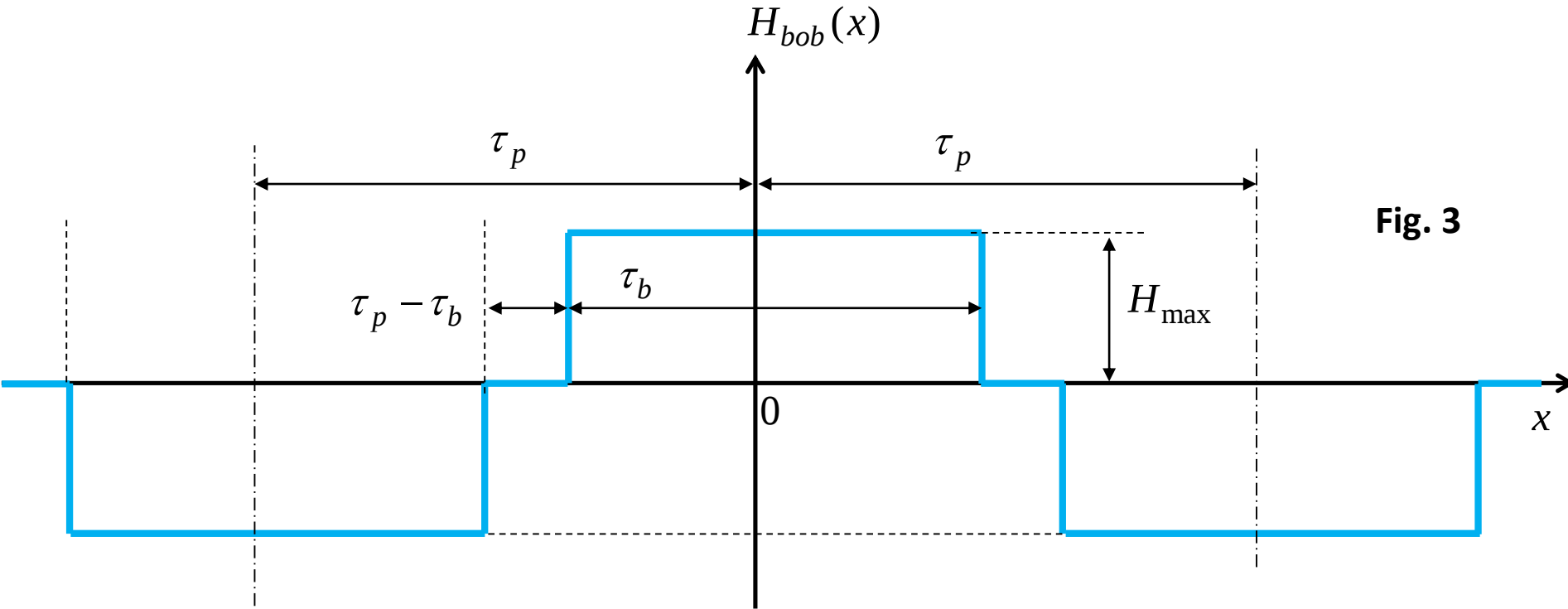


Fig. 3

dove:
$$H_{\max} = \frac{\Delta H_{bob}}{2} = \frac{N i}{b g} \quad (5)$$

Esempio numerico

Si prenda una macchina caratterizzata dai seguenti dati:

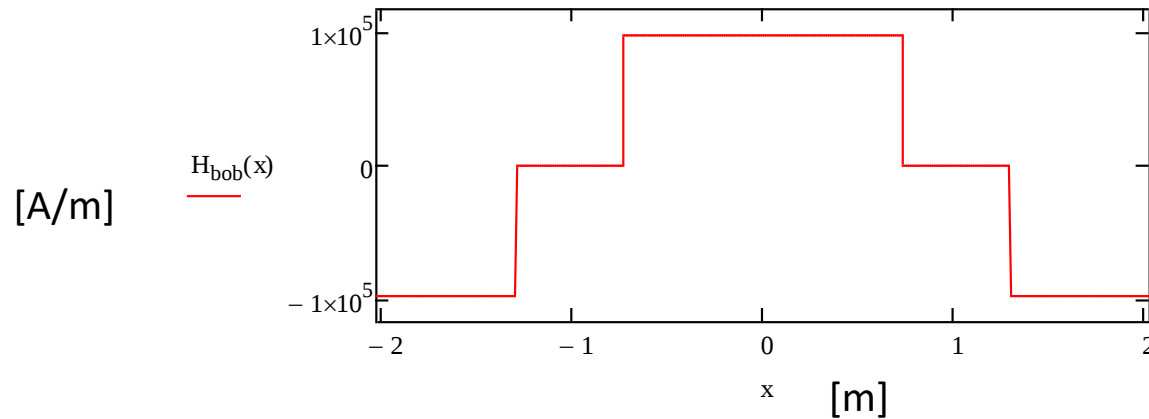
$$\begin{array}{llll} \tau_b = 1.469 & \text{m} & N := 3 & p = 1 \\ \tau_p = 2.034 & \text{m} & i = 1.613 \times 10^3 & \text{A} \\ g = 0.025 & \text{m} & b := 2 & \end{array}$$

Il campo $H_{\text{bob}}(x)$ dovuto alla prima bobina di ogni gruppo polo fase al traferro è dato dalla funzione:

$$H_{\text{max}} := \frac{N \cdot i}{b \cdot g}$$

$$H_{\text{bob}}(x) := \left| \begin{array}{ll} H_{\text{max}} & \text{if } \frac{-\tau_b}{2} \leq x < \frac{\tau_b}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{-\tau_b}{2} - (\tau_p - \tau_b) \leq x < \frac{-\tau_b}{2} \\ -H_{\text{max}} & \text{if } -\tau_p \leq x < -\tau_p + \frac{\tau_b}{2} \\ 0 & \text{if } \frac{\tau_b}{2} \leq x < \frac{\tau_b}{2} + (\tau_p - \tau_b) \\ -H_{\text{max}} & \text{if } \tau_p - \frac{\tau_b}{2} \leq x < \tau_p \end{array} \right.$$

Il grafico del campo $H_{\text{bob}}(x)$ tra $-\tau_p$ e τ_p è riportato nella figura seguente:



La funzione $H_{bob}(x)$ si può approssimare mediante serie di Fourier come:

$$H_{bob}(x) = \sum_{n=1,3,5,7\dots} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx\right) \quad (6)$$

↓
periodo
↓ n -esimo coefficiente di Fourier

↑
solo armoniche dispari per simmetria di un semi-periodo rispetto al successivo

con coefficienti di Fourier definiti da:

$$\begin{aligned}
 H_{bob,n} &= \frac{2}{2\tau_p} \int_{-\tau_p}^{\tau_p} H_{bob}(x) \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx\right) dx = \frac{2}{2\tau_p} 4 \int_0^{\tau_b/2} H_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx\right) dx \\
 &= \frac{4}{\pi n} H_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau_b}{\tau_p} n\right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

Esempio numerico

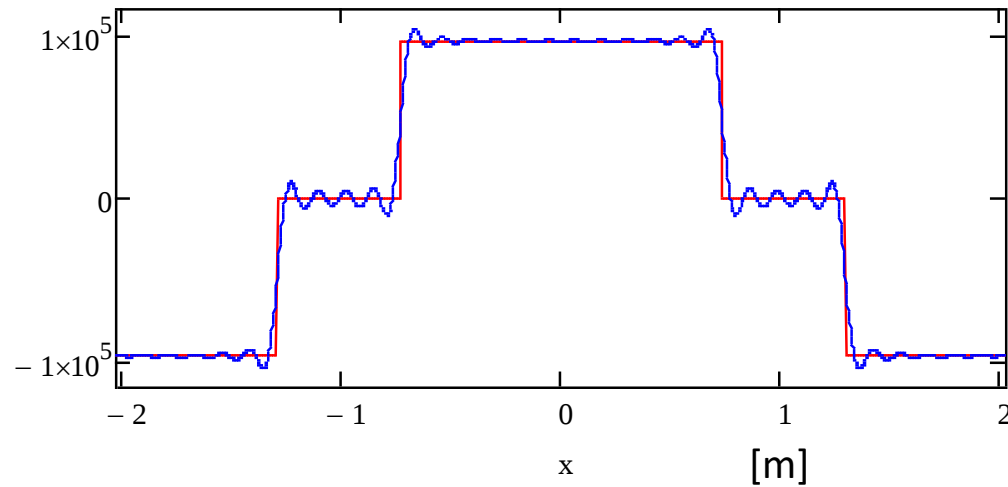
$$n := 1, 3.. 31$$

$$a_n := \frac{4 \cdot H_{\max} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot \tau_b}{2 \cdot \tau_p}\right)}{\pi \cdot n}$$

$$H_{\text{Fourier}}(x) := \sum_n \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \tau_p} \cdot n \cdot x\right) \right)$$

[A/m]

$H_{\text{bob}}(x)$
 $H_{\text{Fourier}}(x)$



Il rapporto

$$\frac{\tau_b}{\tau_p} \leq 1 \quad (8)$$

tra passo di bobina e passo polare rappresenta la porzione di passo polare abbracciata da una bobina e si indica con γ

$$\gamma = \frac{\tau_b}{\tau_p} \quad (9)$$

Normalmente, negli avvolgimenti reali, si ha:

$$\frac{2}{3} \leq \gamma \leq 1$$

essendo il valore tipico attorno a 0.8.

Quindi si può scrivere, usando (5):

$$H_{bob,n} = \frac{4}{\pi n} H_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{2} \gamma n\right) = \frac{4}{\pi n} \frac{N i}{b g} \sin\left(\frac{\pi}{2} \gamma n\right) \quad (10)$$

Si definisce coefficiente o fattore di raccorciamento armonico:

$$\boxed{k_{r,n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \gamma n\right)} \quad (11)$$

cosicchè i coefficienti di Fourier diventano:

$$H_{bob,n} = \frac{4}{\pi n} H_{\max} k_{r,n} = \frac{4}{\pi n} \frac{N i}{b g} k_{r,n} \quad (12)$$

Il termine «raccorciamento» deriva dal fatto che il coefficiente è diverso da uno se il passo di bobina è «raccorciato» rispetto al passo polare, cosa che si verifica normalmente per i motivi che si vedranno oltre.

Campo al traferro prodotto dall'intera fase

La figura sotto si riferisce all'esempio di $q=2$.

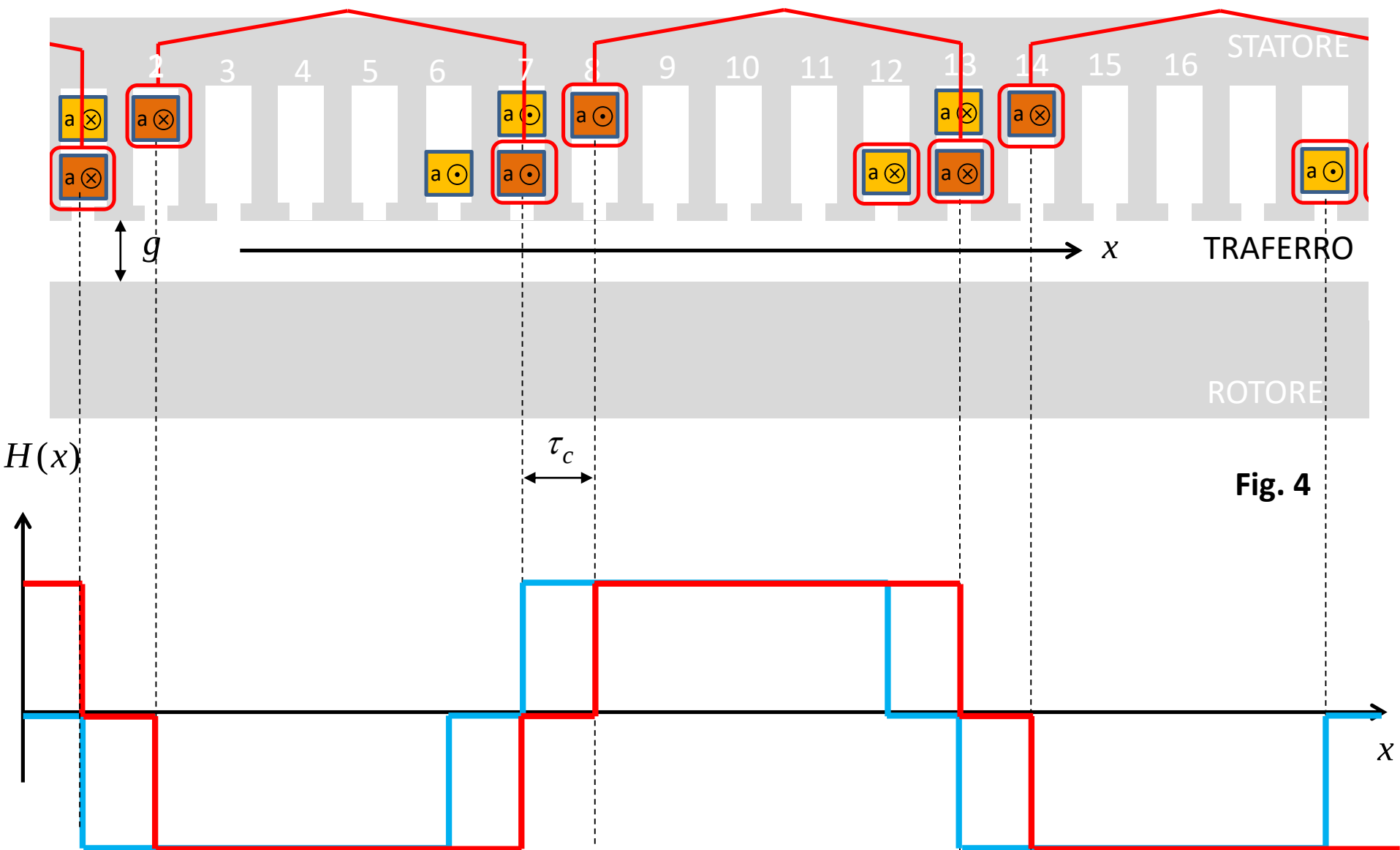


Fig. 4

Il campo prodotto dall'intera fase si può trovare, trascurando la saturazione, mediante il principio di sovrapposizione degli effetti, sommando i campi prodotti da tutte le q bobine per polo per fase.

Come è chiaro dalla figura le altre $q-1$ bobine per polo per fase generano un campo magnetico identico a quello (6) generato dalle prime bobine, ma sfasato di un passo cava τ_c , definito come:

$$\tau_c = \frac{2\pi R}{Z} = \frac{\tau_p}{3q} \quad (13)$$

Quindi il campo prodotto dall'intera fase sarà:

$$\begin{aligned} H_{fase}(x) &= \sum_{k=0,1,2..q-1} H_{bob}(x - k\tau_c) = \sum_{k=0,1,2..q-1} \left[\sum_{n=1,3,5,...} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} n(x - k\tau_c)\right) \right] \\ &= \sum_{k=0,1,2..q-1} \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx - \frac{2\pi}{2\tau_p} nk\tau_c\right) \\ &= \sum_{k=0,1,2..q-1} \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx - \frac{2\pi}{2\tau_p} nk \frac{\tau_p}{3q}\right) = \sum_{k=0,1,2..q-1} \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx - \frac{nk\pi}{3q}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Invertiamo le sommatorie rispetto a k e n :

$$\begin{aligned}
 H_{fase}(x) &= \sum_{k=0,1,2..q-1} \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx - \frac{nk\pi}{3q}\right) \\
 &= \sum_{n=1,3,5,...} \sum_{k=0,1,2..q-1} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx - \frac{nk\pi}{3q}\right) \\
 &= \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \sum_{k=0,1,2..q-1} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{nk\pi}{3q}\right) \quad (15)
 \end{aligned}$$

Passiamo a notazione complessa equivalente:

$$\begin{aligned}
 H_{fase}(x) &= \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0,1,2..q-1} e^{j\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{nk\pi}{3q}\right)} \right\} \\
 &= \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0,1,2..q-1} e^{j\frac{\pi}{\tau_p} nx} e^{-j\frac{nk\pi}{3q}} \right\} = \sum_{n=1,3,5,...} H_{bob,n} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\frac{\pi}{\tau_p} nx} \left[\sum_{k=0,1,2..q-1} e^{-j\frac{nk\pi}{3q}} \right] \right\} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Esaminiamo il termine in parentesi quadra, che si può scrivere come:

$$\sum_{k=0,1,2..q-1} e^{-j\frac{nk\pi}{3q}} = \sum_{k=0,1,2..q-1} e^{-jk\beta} \quad (17)$$

$$\text{con} \quad \beta = \frac{n\pi}{3q} \quad (18)$$

Prima di procedere, osserviamo che β può essere espresso come

$$\beta = \frac{n\pi}{3q} = n \alpha_{c,e} \quad (18a)$$

dove

$$\alpha_{c,e} = \frac{\pi}{3q} \quad (18b)$$

è l'angolo elettric di cava.

Infatti, l'angolo fisico (o «meccanico») di cava è:

$$\alpha_c = \frac{2\pi}{Z} = \frac{2\pi}{(2p)(3q)} = \frac{2\pi}{6pq} = \frac{\pi}{3pq} \quad (18c)$$

In base alla definizione di angolo elettrico come angolo meccanico volte il numero di coppie polari, l'angolo elettrico di cava è:

$$\alpha_{c,e} = \alpha_c p = \frac{\pi}{3q} \quad (18d)$$

il che giustifica la (18a).

La sommatoria (17) rappresenta la somma di q fasori sfasati di modulo unitario sfasati tra loro di un angolo β .

Per trovare un'espressione di tale somma, consideriamo nella figura sotto il caso esemplificativo di $q=3$.

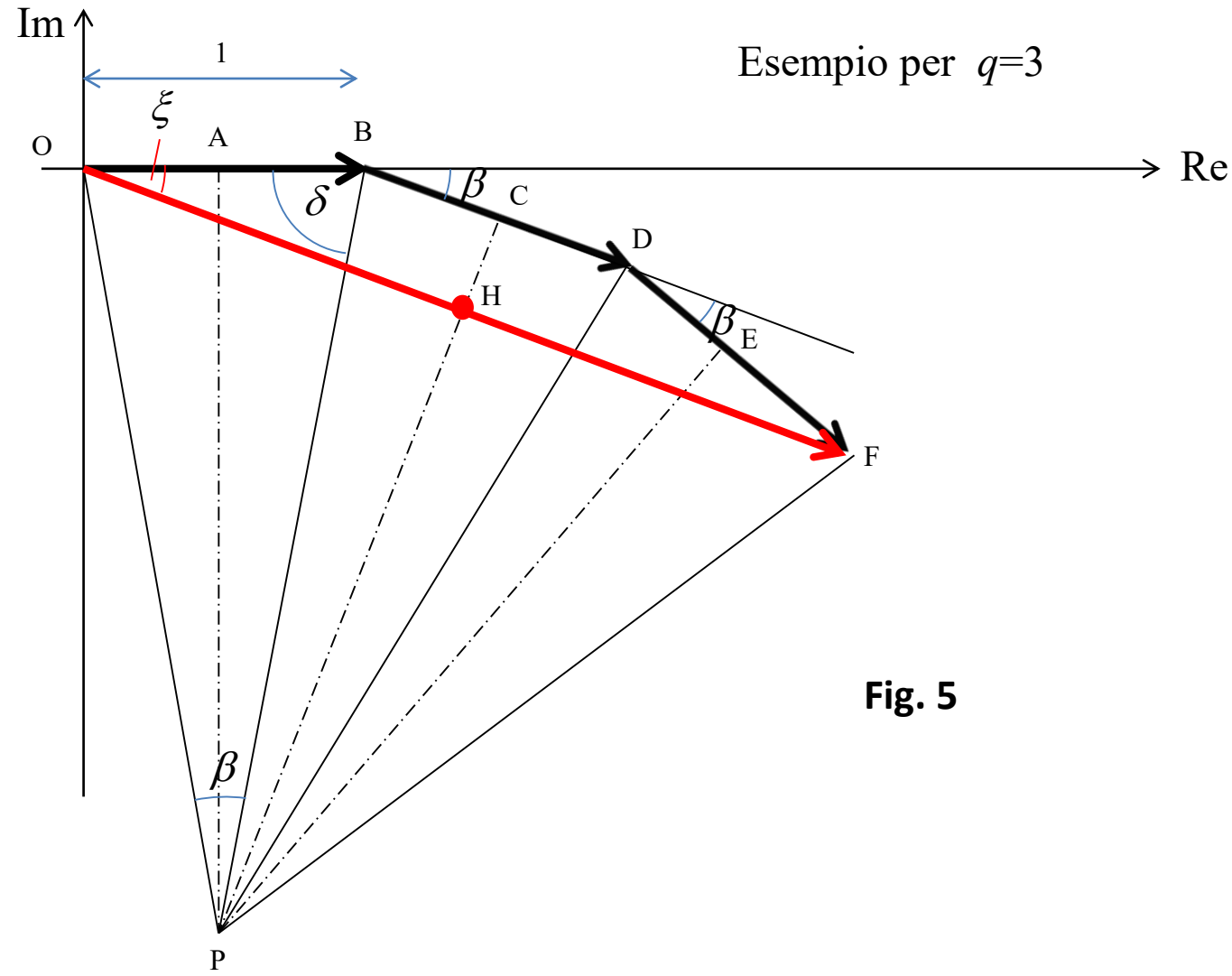


Fig. 5

Con riferimento alla Fig. 5, si può scrivere, i tre fasori OB, BD e DF, di modulo unitario e sfasati tra loro dell'angolo β , vengono sommati dando come risultante il fasore OF, di cui si vuole trovare l'espressione.

Si definisca il punto P come intersezione degli assi dei tre fasori in questione.

L'angolo OPB è uguale a β in quanto:

$$\beta + 2\delta = \pi \quad \text{Somma angoli attorno al punto B}$$

$$\hat{OPB} + 2\delta = \pi \quad \text{Somma angoli interni del triangolo ABP}$$

da cui si ricava:

$$\hat{OPB} = \beta$$

Da considerazioni sul triangolo rettangolo OPA:

$$AO = \frac{1}{2} = OP \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \longrightarrow OP = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

L'angolo OPH è:

$$\hat{OPH} = q \frac{\beta}{2}$$

Da considerazioni sul triangolo rettangolo OPH:

$$OH = OP \cdot \sin(\hat{OPH}) = \frac{\sin\left(q \frac{\beta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Quindi l'ampiezza del vettore somma OF è:

$$OF = 2OH = \frac{\sin\left(q \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Per quanto riguarda l'angolo ξ , si potrebbe determinarne l'espressione, ma non vale la pena farlo in quanto non ha influenza sulla trattazione che segue.



In base alla dimostrazione sopra, la somma (18) si può scrivere:

$$\sum_{k=0,1,2..q-1} e^{-j \frac{nk\pi}{3q}} = \sum_{k=0,1,2..q-1} e^{-jk\beta} = \frac{\sin\left(q \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} e^{-\xi} \tag{19}$$

Considerando la definizione (18a) di β e sostituendo (19) in (16), si ha:

$$\begin{aligned}
 H_{fase}(x) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} H_{bob,n} \operatorname{Re} \left\{ e^{j \frac{\pi}{\tau_p} nx} \left[\sum_{k=0,1,2,\dots,q-1} e^{-j \frac{nk\pi}{3q}} \right] \right\} \\
 &= \sum_{n=1,3,5,\dots} H_{bob,n} \operatorname{Re} \left\{ e^{j \frac{\pi}{\tau_p} nx} \frac{\sin \left(q \frac{n \alpha_{c,e}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{n \alpha_{c,e}}{2} \right)} e^{-j \xi} \right\} = \sum_{n=1,3,5,\dots} H_{bob,n} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin \left(q \frac{n \alpha_{c,e}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{n \alpha_{c,e}}{2} \right)} e^{j \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi \right)} \right\} \\
 &= \sum_{n=1,3,5,\dots} H_{bob,n} \frac{\sin \left(q \frac{n \alpha_{c,e}}{2} \right)}{\sin \left(\frac{n \alpha_{c,e}}{2} \right)} \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi \right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

dove $\alpha_{c,e}$ è l'angolo elettrico di cava.

Sostituiamo ora in (19) l'espressione (12) di $H_{bob,n}$

$$H_{bob,n} = \frac{4}{\pi n} \frac{N i}{b g} k_{r,n}$$

$$\begin{aligned}
H_{fase}(x) &= \sum_{n=1,3,5,\dots} H_{bob,n} \frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{N}{b} \frac{i}{g} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} k_{r,n} \frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \quad (20)
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo usare l'espressione trovata in precedenza per N: $N = \frac{b}{2pq} N_s$

$$\begin{aligned}
H_{fase}(x) &= \frac{4}{\pi} \frac{N}{b} \frac{i}{g} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} k_{r,n} \frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{i}{b} \frac{b}{g} \frac{1}{2pq} N_s \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} k_{r,n} \frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} k_{r,n} \frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \quad (21)
\end{aligned}$$

Introduciamo ora il coefficiente:

$$k_{d,n} = \frac{\sin\left(q \frac{n \alpha_{c,e}}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{n \alpha_{c,e}}{2}\right)} \quad (22)$$

chiamato coefficiente di distribuzione armonico.

Si nota che per questo coefficiente si può usare un'espressione equivalente alternativa a (22), considerando l'espressione (18d) dell'angolo elettrico di cava:

$$k_{d,n} = \frac{\sin\left(q \frac{n \alpha_{c,e}}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{n \alpha_{c,e}}{2}\right)} = \frac{\sin\left(q \frac{n}{2} \frac{\pi}{3q}\right)}{q \sin\left(\frac{n}{2} \frac{\pi}{3q}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{n \pi}{6}\right)}{q \sin\left(\frac{n \pi}{6q}\right)} \quad (22a)$$

$$k_{d,n} = \frac{\sin\left(\frac{n \pi}{6}\right)}{q \sin\left(\frac{n \pi}{6q}\right)} \quad (22b)$$

Si nota dalla (22b) che il coefficiente armonico di distribuzione è uno se $q=1$, cioè se l'avvolgimento di fase non è «distribuito» bensì «concentrato» in una sola bobina per polo. Questo giustifica la definizione di «coefficiente di distribuzione».

Usando il coefficiente di distribuzione armonico il campo prodotto da una fase diventa:

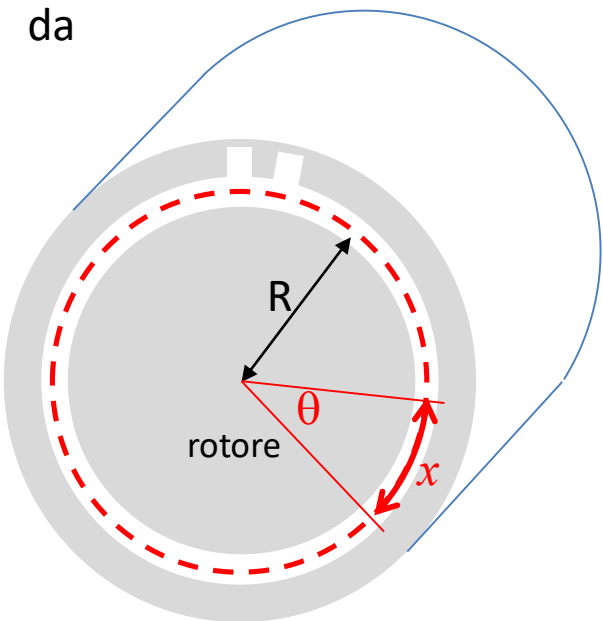
$$H_{fase}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \quad (24)$$

Ridefinendo ora l'origine della coordinata x nel punto in cui il campo della fase è massimo, cioè sull'asse geometrico della fase, l'espressione del campo diventa:

$$H_{fase}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx\right) \quad (25)$$

**Distribuzione del campo magnetico al
traferro prodotto da una fase percorsa
dalla corrente i**

La posizione nello spazio lungo la circonferenza al traferro si può identificare, oltre che con la coordinata curvilinea x , anche con il corrispondente angolo θ . Le due grandezze sono legate da



$$x = R \theta$$

D'altra parte

$$2\pi R = \tau_p (2p)$$

$$R = \frac{p \tau_p}{\pi}$$

$$x = R \theta = \frac{p \tau_p}{\pi} \theta$$

Sostituendo in (25):

$$H_{fase}(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} n \frac{p \tau_p}{\pi} \theta\right) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(pn\theta)$$

$$H_{fase}(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(pn\theta) \quad (25')$$

Considerando l'angolo elettrico corrispondente a θ :

$$\theta_e = p\theta$$

si può esprimere il campo anche rispetto all'angolo elettrico:

$$H_{fase}(\theta_e) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(n\theta_e) \quad (25'')$$

Espressione tramite funzione di avvolgimento

Il campo prodotto da una fase può infine essere espresso, da (25') come segue:

$$H_{fase}(\theta) = \frac{i}{g} W_{fase}(\theta) \quad (25''')$$

$$W_{fase}(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(pn\theta) \quad (25''')$$

«Funzione di avvolgimento» relativa alla fase

- Adimensionale
- Dipende solo dalla geometria e dal progetto della fase
- Assume che lo zero per l'angolo θ sia scelto sull'asse della fase

Esempio numerico

Nel caso della macchina considerata in precedenza:

$$\tau_b = 1.469 \quad \text{m} \quad N := 3 \quad p = 1$$

$$\tau_p = 2.034 \quad \text{m} \quad i = 1.613 \times 10^3 \quad \text{A}$$

$$g = 0.025 \quad \text{m} \quad b := 2 \quad Z := 36$$

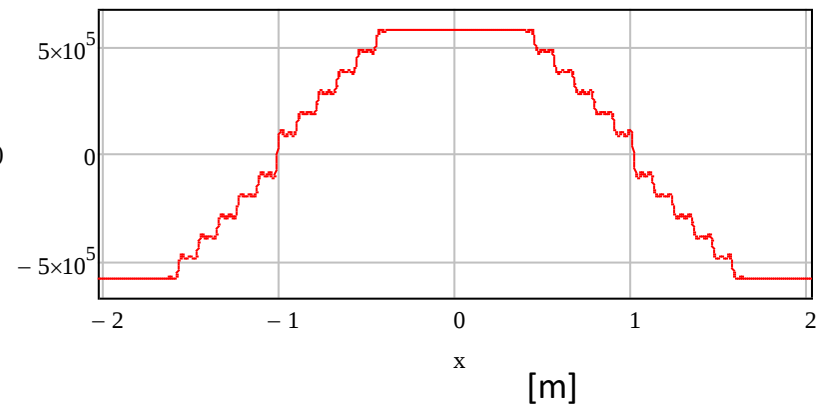
$$N_s := \frac{Z}{3} \cdot \frac{N}{b} = 18 \quad q := \frac{Z}{2 \cdot p \cdot 3} = 6$$

$$n := 1, 3 \dots 91$$

$$k_{r_n} := \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\tau_b}{\tau_p} \cdot n\right) \quad k_{d_n} := \frac{\sin\left(\frac{n \cdot \pi}{6}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{6 \cdot q}\right)}$$

$$H_{fse}(x) := \frac{2}{\pi} \cdot \frac{i}{g} \cdot \frac{N_s}{p} \cdot \left[\sum_n \left(\frac{k_{r_n} \cdot k_{d_n}}{n} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} \cdot x \cdot n\right) \right) \right] \rightarrow \underline{H_{fse}(x)}$$

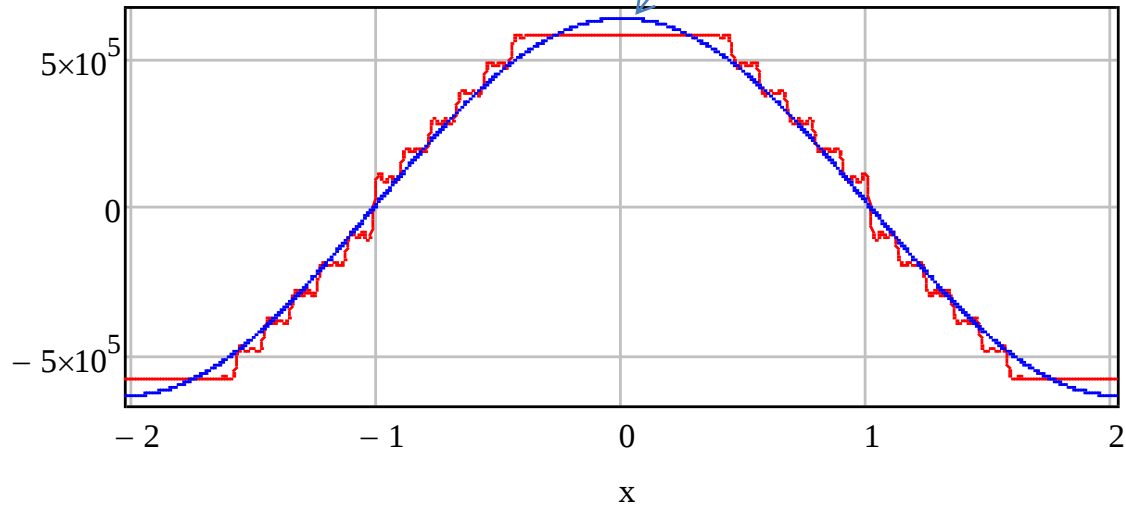
[A/m]



$$H_{\text{fase_fund}}(x) := \frac{2}{\pi} \cdot \frac{i}{g} \cdot \frac{N_s}{p} \cdot \left(k_{r1} \cdot k_{d1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} \cdot x\right) \right)$$

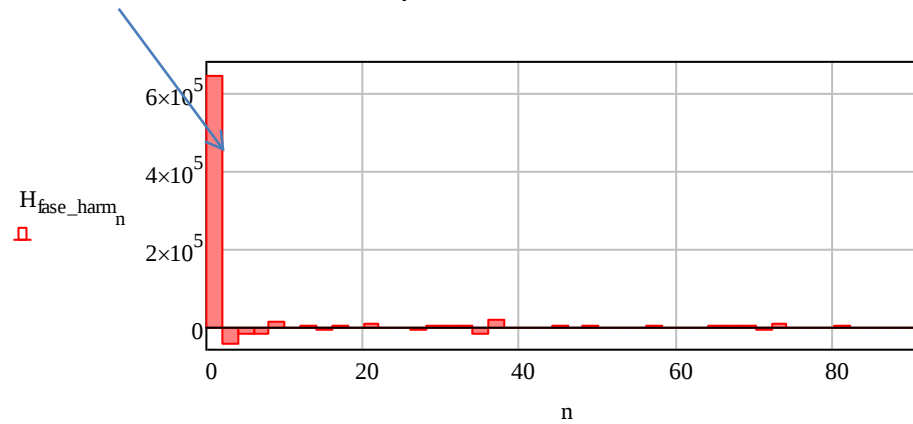
Fondamentale (n=1)

$H_{\text{fase}}(x)$
—
 $H_{\text{fase_fund}}(x)$
—



Fondamentale

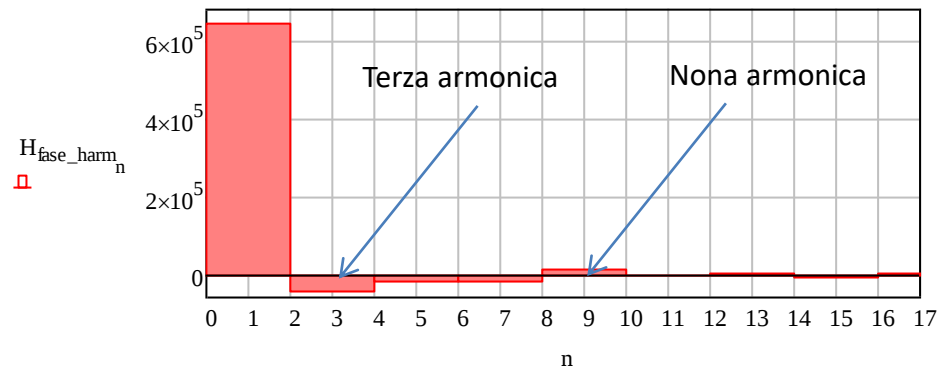
Spettri armonici



Armonica di campo n -esima

$$H_{\text{fase_harm}_n} := \frac{2}{\pi} \cdot \frac{i}{g} \cdot \frac{N_s}{p} \cdot \frac{k_{r_n} \cdot k_{d_n}}{n}$$

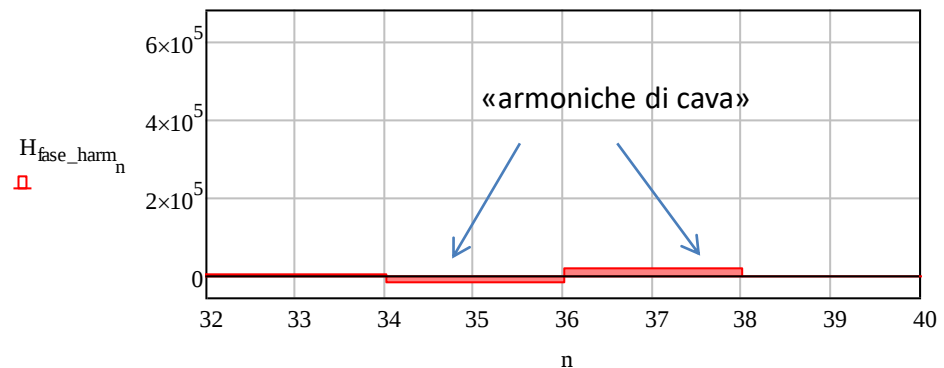
Si nota la presenza di armoniche multiple di 3 nel campo prodotto dalla singola fase



Le armoniche di cava hanno ordine $n=Z+1$

$n=Z-1$

essendo Z il numero di cave. Esse sono responsabili della forma «gradinata» del campo magnetico



Si ipotizzi di prendere come riferimento di zero per x l'asse della fase «a».

Con questa scelta, il campo prodotto dalla fase «a» percorsa dalla corrente i è, secondo la

$$(25) \quad H_{fase,a}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx\right) \quad (25a)$$

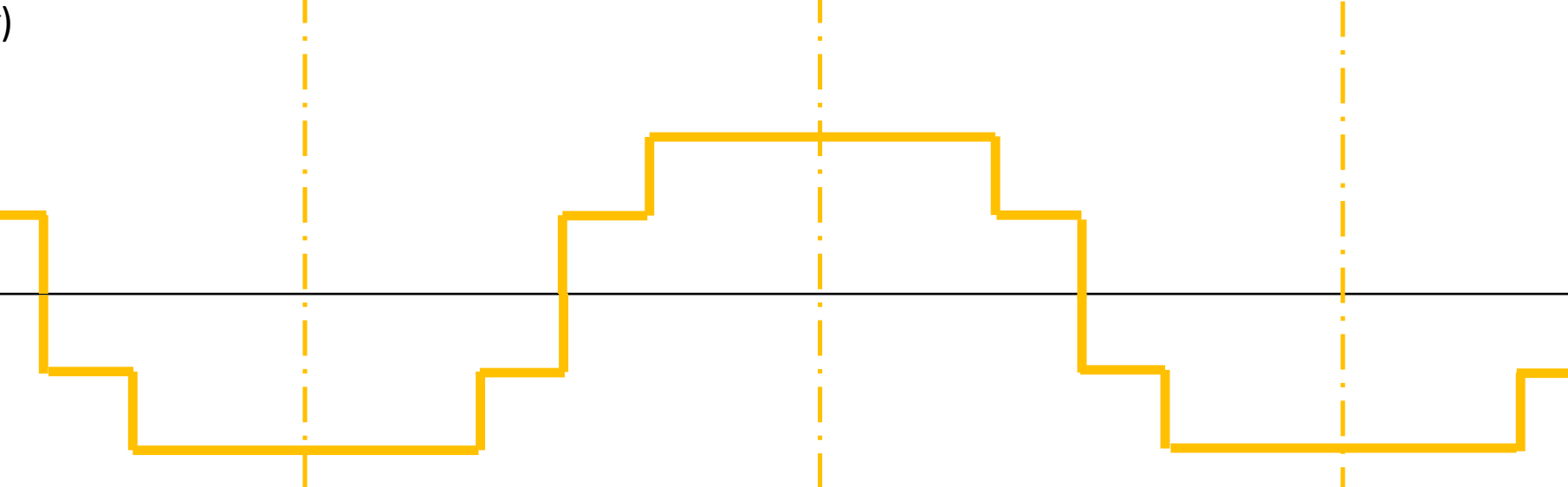
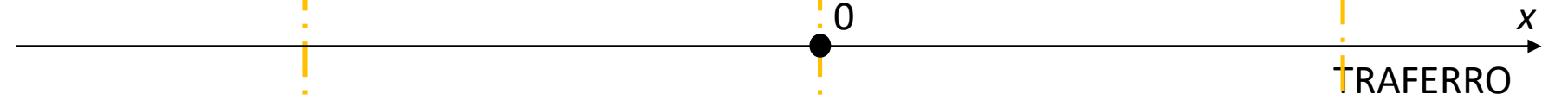
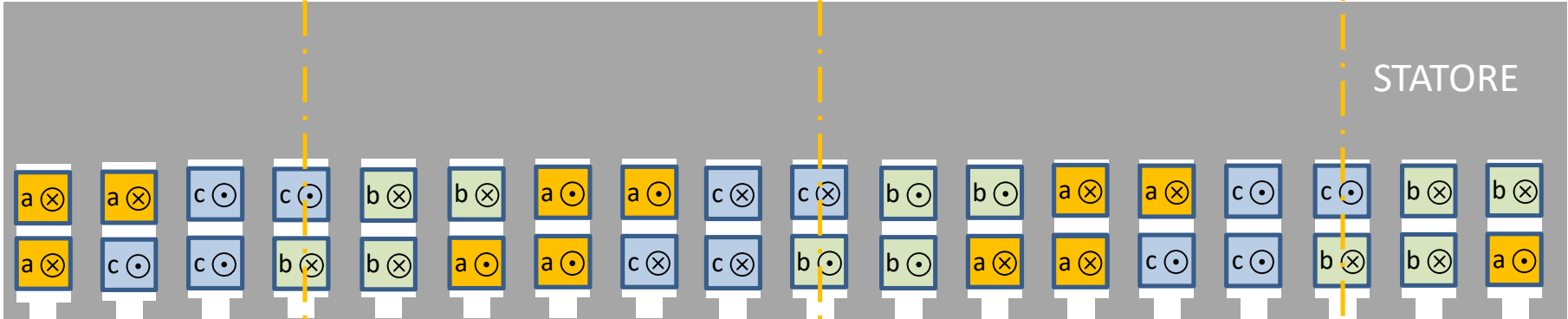
Siccome le fase «b» e «c» sono identiche alla fase «a» ma sfasate nello spazio di $2/3$ del passo polare, Il campo prodotto dalla fase «b» e dalla fase «c», quando percorse dalla stessa corrente i , sarà identico a quello della fase «a» ma sfasato di $2/3$ del passo polare.

$$\begin{aligned} H_{fase,b}(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} n\left(x - \frac{2}{3} \tau_p\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{2}{3} \pi n\right) \end{aligned} \quad (25b)$$

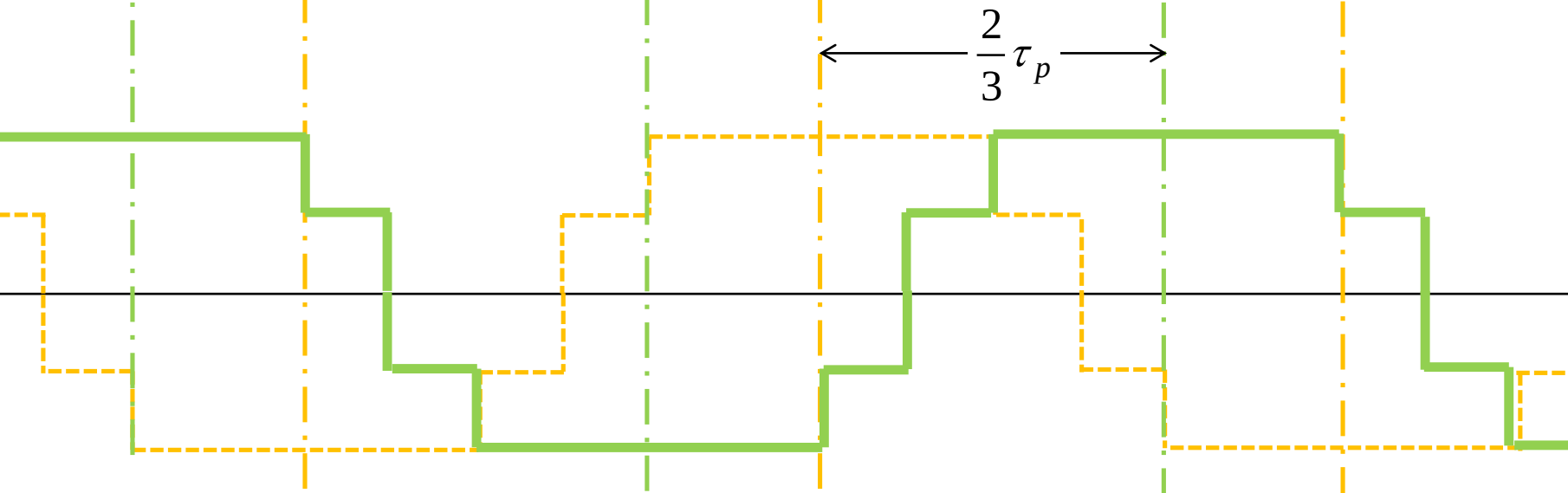
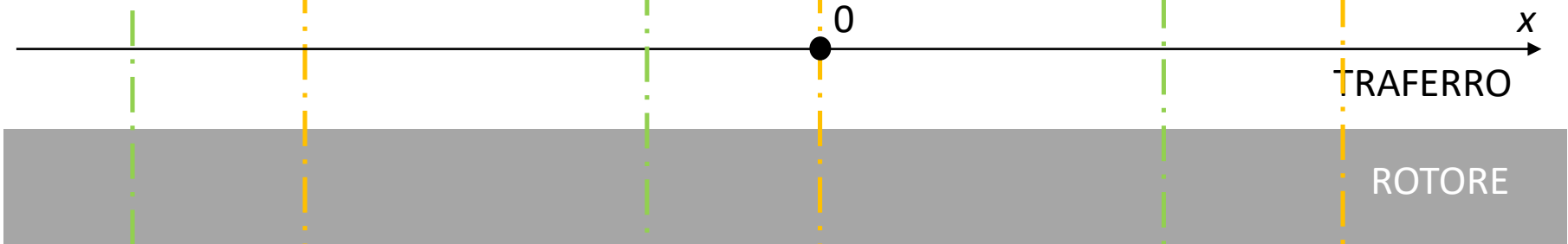
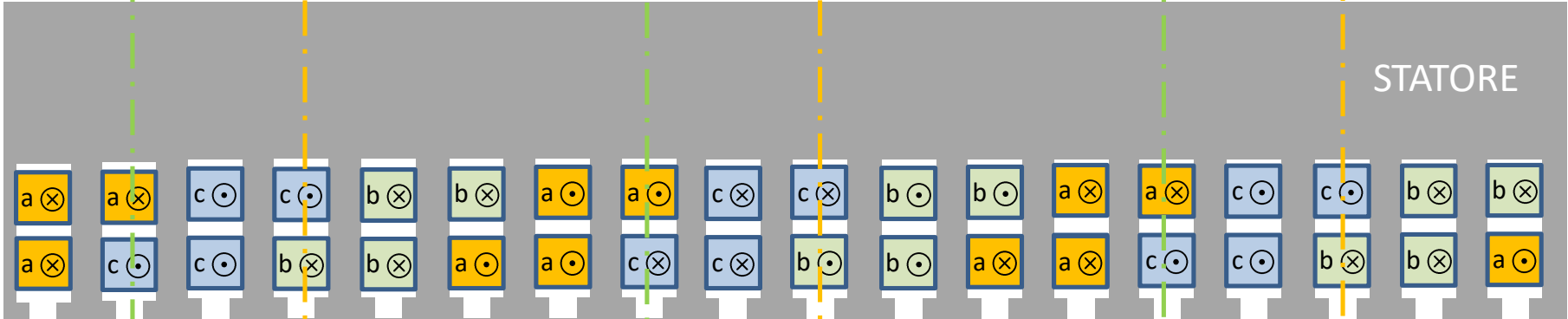
$$\begin{aligned} H_{fase,c}(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} n\left(x - \frac{4}{3} \tau_p\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{4}{3} \pi n\right) \end{aligned} \quad (25c)$$

Ciò è illustrato nella figure seguenti.

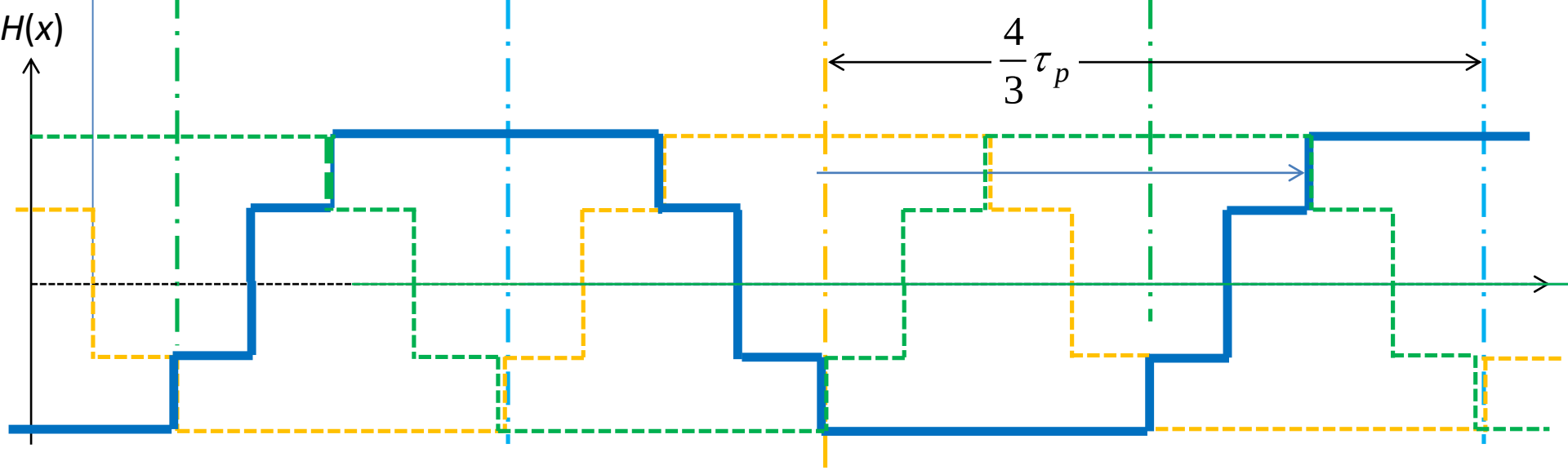
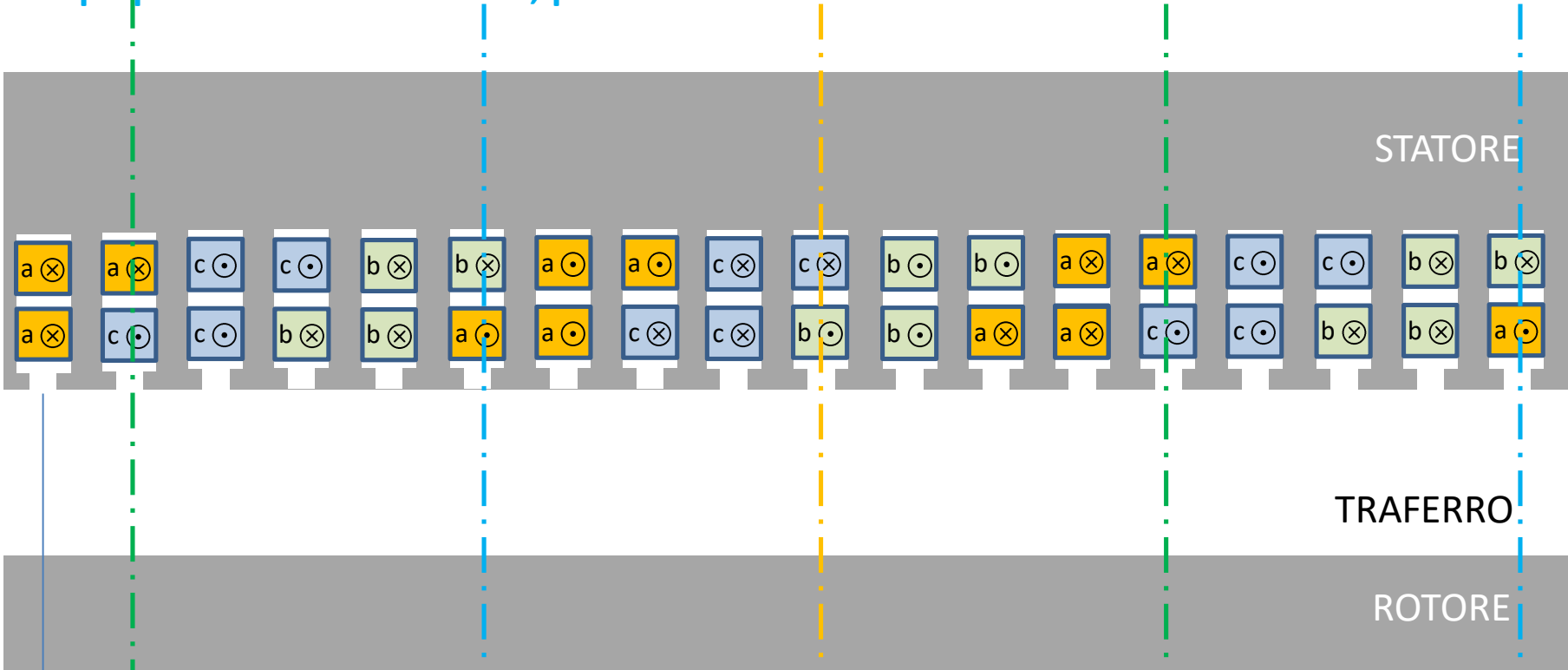
Campo prodotto dalla fase «a», percorsa dalla corrente i

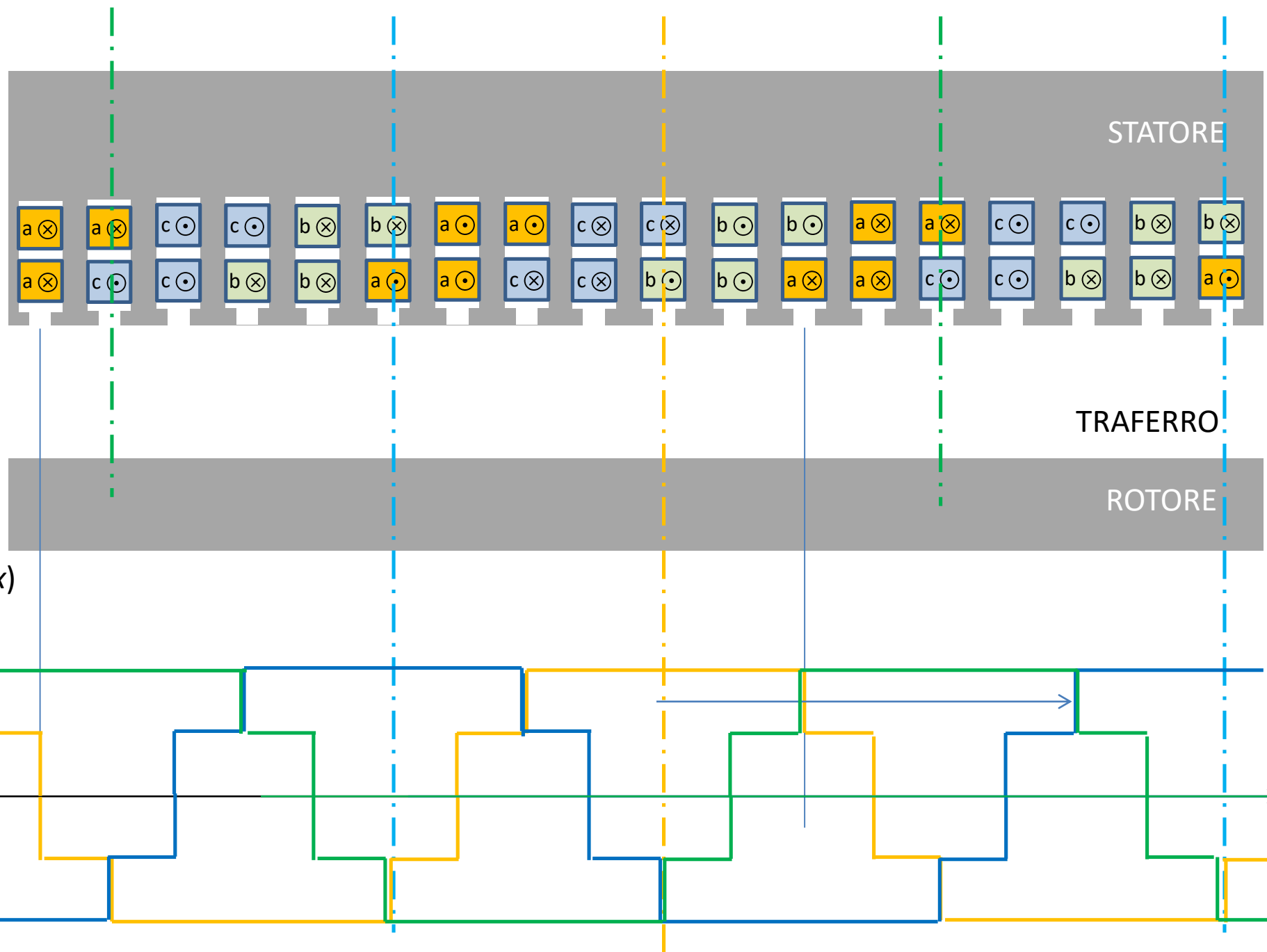


Campo prodotto dalla fase «b», percorsa dalla corrente i



Campo prodotto dalla fase «c», percorsa dalla corrente i





Campo al traferro prodotto dall'avvolgimento trifase

Consideriamo ora il caso in cui le tre fasi dell'avvolgimento (a, b, c) siano rispettivamente alimentate dalle tre correnti, sinusoidali, di frequenza f ed ampiezza I_0 , sfasate tra loro di $2/3$ di periodo T :

$$i_a(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (26)$$

$$i_b(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad (27)$$

$$i_c(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \quad (28)$$

Pulsazione elettrica (rad/s)

$$\omega = 2\pi f$$

Periodo:

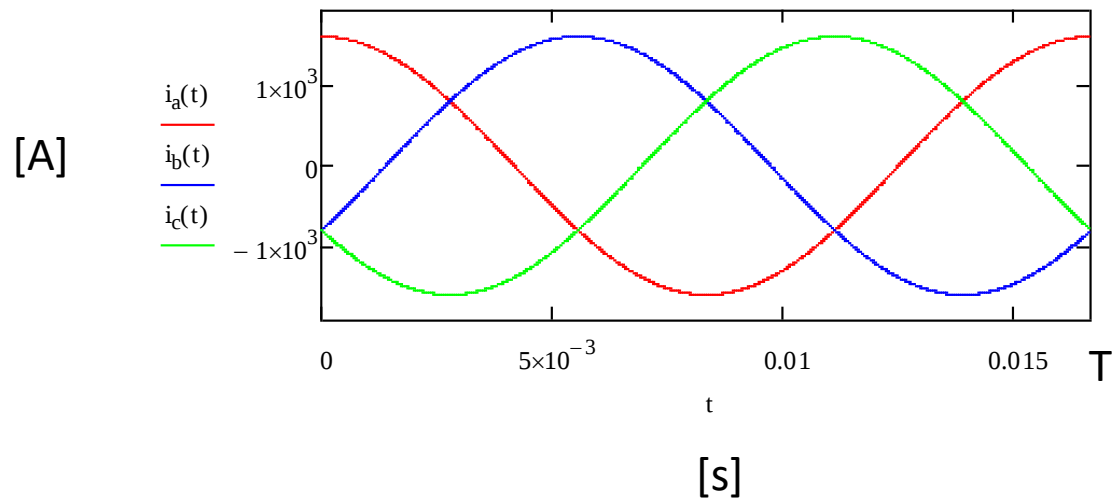
$$T = 1 / f$$

Esempio numerico

$$I_0 := 1613 \quad \text{A} \quad f := 60 \quad \text{Hz}$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad T := \frac{1}{f}$$

$$i_a(t) := I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad i_b(t) := I_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2}{3} \cdot \pi\right) \quad i_c(t) := I_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{4}{3} \cdot \pi\right)$$



Il campo $H_a(t, x)$ prodotto dalla fase a è dato da (25) dove i è la corrente variable (26):

$$H_a(x, t) = \frac{2}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx\right) \cos(\omega t) \quad (29)$$

Il campo prodotto dalle altre due fasi, secondo la (25b) e (25c), è:

$$H_b(x, t) = \frac{2}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{2}{3} \pi n\right) \cos\left(\omega t - \frac{2}{3} \pi\right) \quad (30)$$

$$H_c(x, t) = \frac{2}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{4}{3} \pi n\right) \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \pi\right) \quad (31)$$

In assenza di saturazione, vale il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui il campo risultante dovuto alle tre correnti di fase è la somma dei tre campi sopra:

$$\begin{aligned} H(x, t) &= H_a(x, t) + H_b(x, t) + H_c(x, t) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \underbrace{\left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx\right) \cos(\omega t) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{2}{3} \pi n\right) \cos\left(\omega t - \frac{2}{3} \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{4}{3} \pi n\right) \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \pi\right) \right]}_{C_n(x, t)} \end{aligned} \quad (32)$$

Sviluppiamo ora i termini in parentesi quadra usando le formule di Werner

$$\left(\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \right)$$

$$\begin{aligned}
C_n(x,t) &= \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx\right) \cos(\omega t) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{2}{3} \pi n\right) \cos\left(\omega t - \frac{2}{3} \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \frac{4}{3} \pi n\right) \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \pi\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t\right) + \right. \\
&\quad + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{2}{3} \pi(n+1)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{2}{3} \pi(n-1)\right) + \\
&\quad \left. + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{4}{3} \pi(n+1)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{4}{3} \pi(n-1)\right) \right] \tag{33}
\end{aligned}$$

Esaminiamo la (33) per diversi ordini armonici dispari, ossia:

- n multiplo di 3: $n = 3, 9, 15, 21, 27, \dots$
- n dato da $6k+1$ con $k=0,1,2,\dots$ naturale: $n=1, 7, 13, 19, 25, \dots$
- n dato da $6k-1$ con $k=1,2,\dots$ naturale: $n=5, 11, 17, 23, \dots$

Si nota che i tre casi sopra esauriscono tutti i possibili n interi dispari, che compaiono nello sviluppo in serie (32).

Ordini armonici n multipli di 3

Per questi ordini armonici, n si può scrivere come $n = 3k$

con k generico numero naturale. In tal caso la (33) diventa:

$$\begin{aligned} C_n(x, t) = & \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t\right) + \right. \\ & + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \\ & \left. + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{4}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Ciò si giustifica in base all'identità:

$$\cos(\alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\alpha - \frac{4}{3}\pi\right) = 0 \quad (34)$$

valida per ogni α



Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\alpha - \frac{4}{3}\pi\right) &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\alpha} + e^{j\left(\alpha - \frac{2}{3}\pi\right)} + e^{j\left(\alpha - \frac{4}{3}\pi\right)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j\alpha} + e^{j\alpha} e^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{j\alpha} e^{-j\frac{4}{3}\pi} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\alpha} \underbrace{\left(e^{j0} + e^{-j\frac{2}{3}\pi} + e^{-j\frac{4}{3}\pi} \right)}_{\text{somma nulla perchè 3 fasori unitari sfasati di } 120^\circ} \right\} \end{aligned}$$

Ordini armonici n esprimibili come $6k+1$ con $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Per questi n la (33) diventa:

$$\begin{aligned} C_n(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \right. \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{2}{3} \pi (6k+2) \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{2}{3} \pi 6k \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{4}{3} \pi (6k+2) \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{4}{3} \pi 6k \right) \left. \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \right. \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{4}{3} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{8}{3} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) \left. \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \right. \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{4}{3} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{2}{3} \pi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) \left. \right] = \frac{3}{2} \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) \end{aligned}$$

sempre in virtù dell'identità (34).

Ordini armonici n esprimibili come $6k-1$ con $k=0, 1, 2, 3, \dots$

Per questi n la (33) diventa:

$$\begin{aligned} C_n(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \right. \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{2}{3} \pi 6k \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{2}{3} \pi (6k - 2) \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t - \frac{4}{3} \pi 6k \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t - \frac{4}{3} \pi (6k - 2) \right) \Bigg] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \right. \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t + \frac{8}{3} \pi \right) \Bigg] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t \right) + \right. \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t + \frac{4}{3} \pi \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) + \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \Bigg] = \frac{3}{2} \cos \left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t \right) \end{aligned}$$

sempre in virtù dell'identità (34).

In definitiva si è dimostrato che:

$$C_n(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 3, 9, 15, 21, \dots \\ \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t\right) & \text{se } n = 1, 7, 13, 19, 25, \dots \\ \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t\right) & \text{se } n = 5, 11, 17, 23, \dots \end{cases} \quad (34)$$

Usando questo risultato, la (32) si può riscrivere:

Fondamentale (n=1) e armoniche
rotanti come la fondamentale

Fondamentale (n=1) e armoniche
contro-rotanti

$$H(x, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,7,13,19,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \omega t\right) + \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=5,11,17,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx + \omega t\right) \quad (35)$$

Il significato è più chiaro se si esprime la coordinata spaziale in forma temporale, usando (v. sopra):

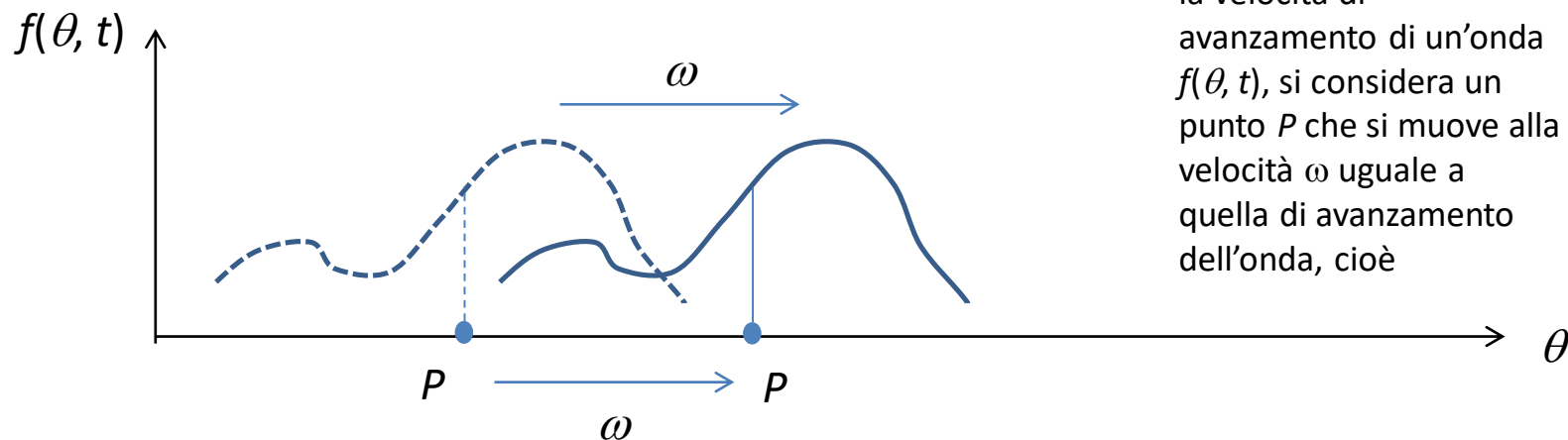
$$x = R\theta = \frac{p \tau_p}{\pi} \theta$$

$$H(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,7,13,19,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta - \omega t) + \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=5,11,17,\dots} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta + \omega t) \quad (36)$$

NOTA 1

In generale, per verificare la velocità di avanzamento di un'onda $f(\theta, t)$, si considera un punto P che si muove alla velocità ω uguale a quella di avanzamento dell'onda, cioè

$$\theta_P(t) = \omega t$$



In generale, per verificare la velocità di avanzamento di un'onda $f(\theta, t)$, si considera un punto P che si muove alla velocità ω uguale a quella di avanzamento dell'onda, cioè

Deve verificarsi che, valutando la $f(\theta, t)$ per $\theta = \omega t$, si deve ottenere una costante, cioè un valore non dipendente dal tempo.

La (36) può essere riscritta come:

$$H(\theta, t) = H_{fund}(\theta, t) + \sum_{n=7,13,19,\dots} H_n^{\rightarrow}(\theta, t) + \sum_{n=5,11,17,\dots} H_n^{\leftarrow}(\theta, t) \quad (37)$$

dove

«fondamentale» o «prima armonica» del campo rotante

$$H_{fund}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\theta - \omega t) \quad (38)$$

n-esima «armonica spaziale» rotante come la fondamentale

$$H_n^{\rightarrow}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta - \omega t) \quad (39) \quad n=7,13,19,\dots$$

n-esima «armonica spaziale» rotante come la fondamentale

$$H_n^{\leftarrow}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta + \omega t) \quad (40) \quad n = 5, 11, 17, \dots$$

Vediamo la polarità e la velocità di rotazione della fondamentale e delle varie armoniche

La fondamentale è un'onda sinusoidale con p coppie polari che ruota alla velocità:

$$\omega_{fund} = \frac{\omega}{p}$$

(41)

La fondamentale del campo rotante ruota a una velocità pari alla pulsazione elettrica diviso il numero di coppie polari:

Infatti (vedi NOTA 1 sopra), se valutiamo la (38) per $\theta = \theta(t) = \omega_{fund} t$
troviamo un valore costante nel tempo.

L'armonica n-esima rotante come la fondamentale è un'onda con np coppie polari che ruota alla velocità

$$\omega_n^{\rightarrow} = \frac{\omega}{np}$$

(42)

nello stesso senso della fondamentale.

Infatti (vedi NOTA 1 sopra), se valutiamo la (39) per $\theta = \theta(t) = \omega_n^{\rightarrow} t$
troviamo un valore costante nel tempo.

L'armonica n-esima contro-rotante è un'onda con np coppie polari che ruota alla velocità

$$\omega_n^{\leftarrow} = \frac{\omega}{np}$$

(43)

in senso opposto rispetto alla fondamentale.

Infatti (vedi NOTA 1 sopra), se valutiamo la (40) per $\theta = \theta(t) = -\omega_n^{\leftarrow} t$
troviamo un valore costante nel tempo.

Esempio numerico

Ordini armonici di armoniche
rotanti come la fondamentale

$$n_r := 7, 13.. 91$$

Ordini armonici di armoniche
contro-rotanti

$$n_{cr} := 5, 11.. 89$$

Fondamentale del campo rotante

$$H_{fund}(\theta, t) := \frac{3}{\pi} \cdot \frac{I_0}{g} \cdot \frac{N_s}{p} \cdot k_{d1} \cdot k_{r1} \cdot \cos(p \cdot \theta - \omega \cdot t)$$

Armonica n-esima rotante come la
fondamentale

$$H_r(\theta, t, n) := \frac{3}{\pi} \cdot \frac{I_0}{g} \cdot \frac{N_s}{p} \cdot \frac{k_{dn} \cdot k_{rn}}{n} \cdot \cos(p \cdot n \cdot \theta - \omega \cdot t)$$

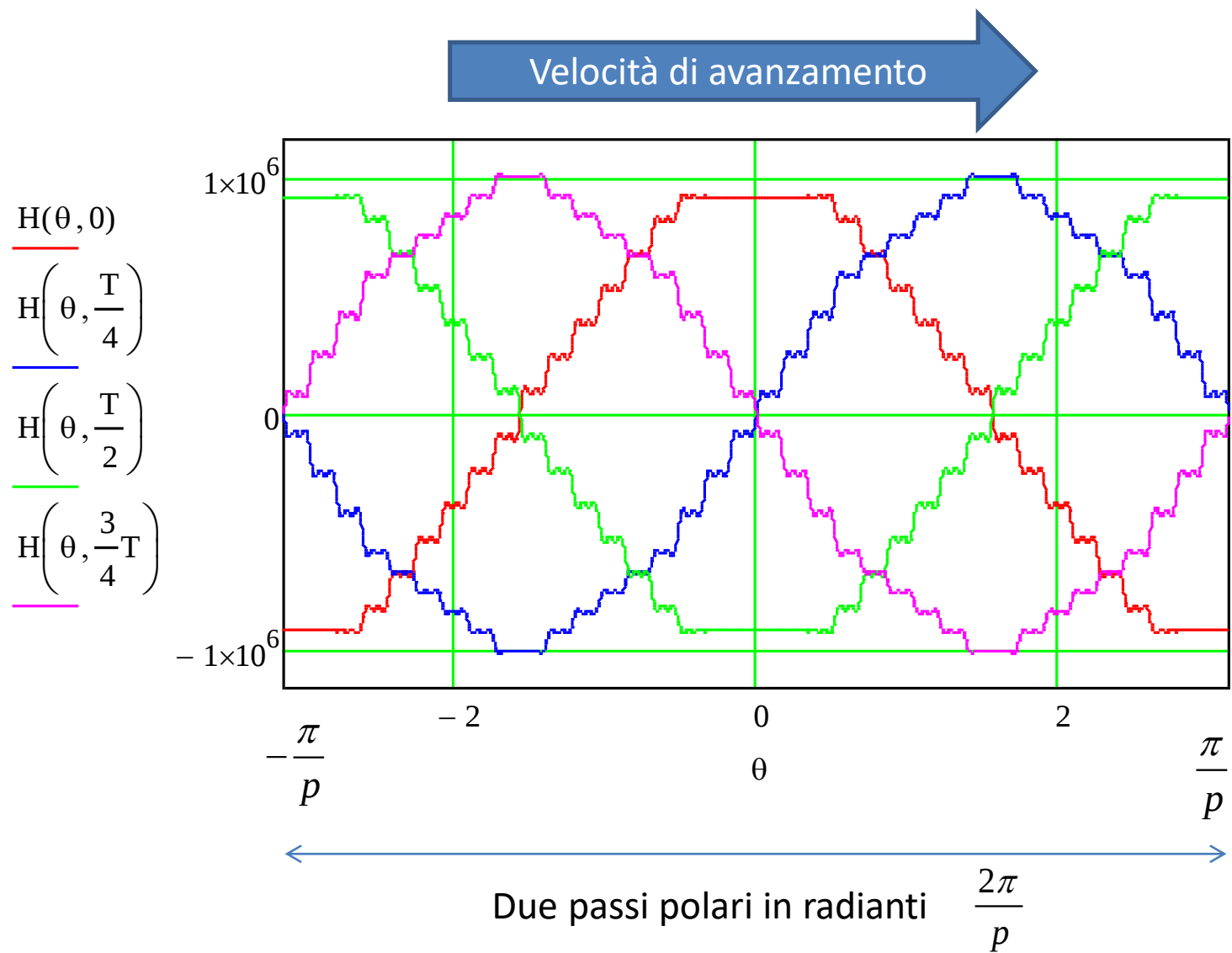
Armonica n-esima contro-rotante

$$H_{cr}(\theta, t, n) := \frac{3}{\pi} \cdot \frac{I_0}{g} \cdot \frac{N_s}{p} \cdot \frac{k_{dn} \cdot k_{rn}}{n} \cdot \cos(p \cdot n \cdot \theta + \omega \cdot t)$$

Campo complessivo

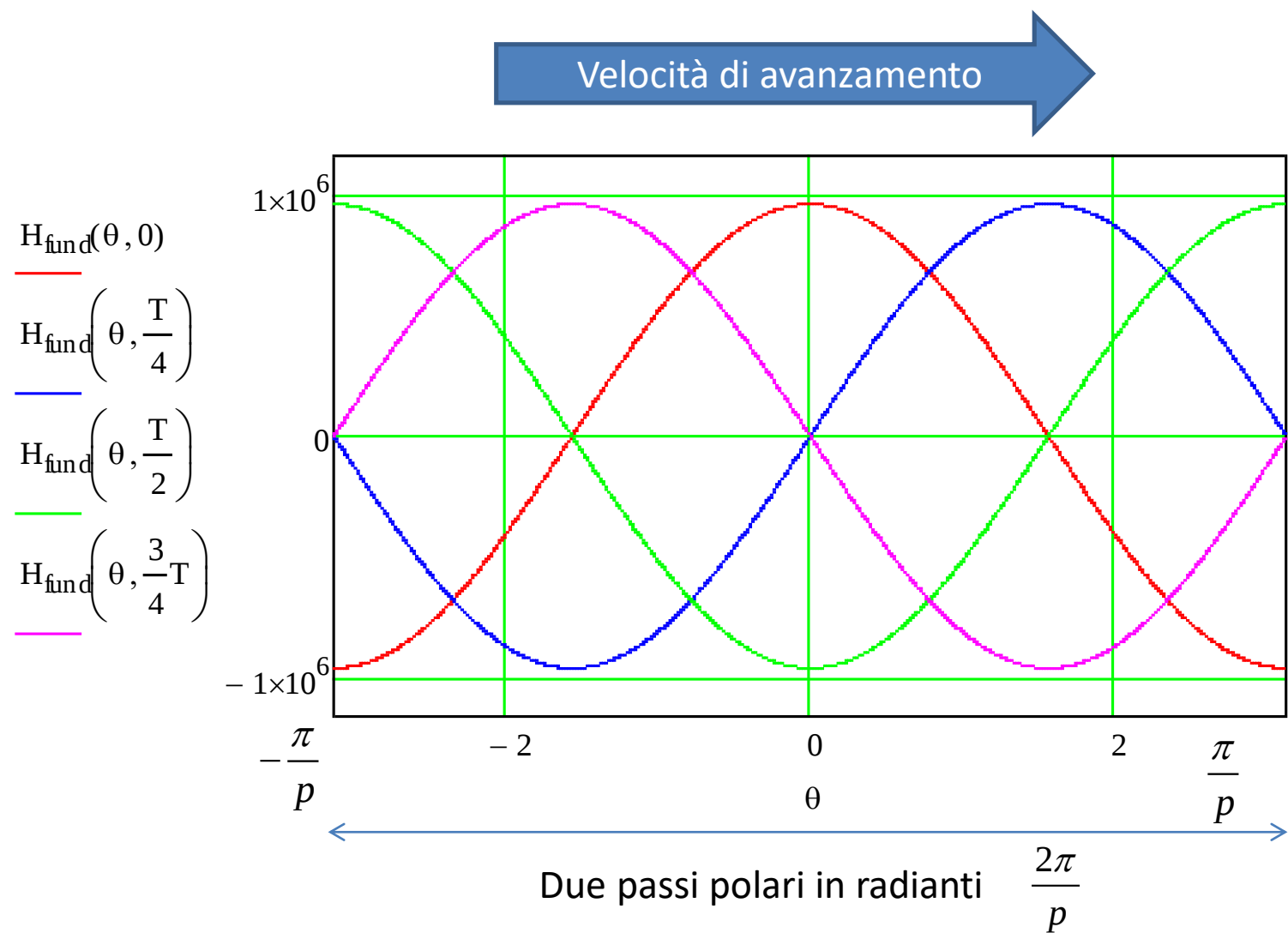
$$H(\theta, t) := H_{fund}(\theta, t) + \sum_{n_r} H_r(\theta, t, n_r) + \sum_{n_{cr}} H_{cr}(\theta, t, n_{cr})$$

Campo complessivo in diversi istanti di tempo



Si vede che l'onda complessiva ha $p=1$ coppie polari e avanza verso destra, compiendo due passi polari ($2\pi/p$) in un periodo T , cioè ruotando ad una velocità angolare ω/p .

Fondamentale a diversi istanti di tempo

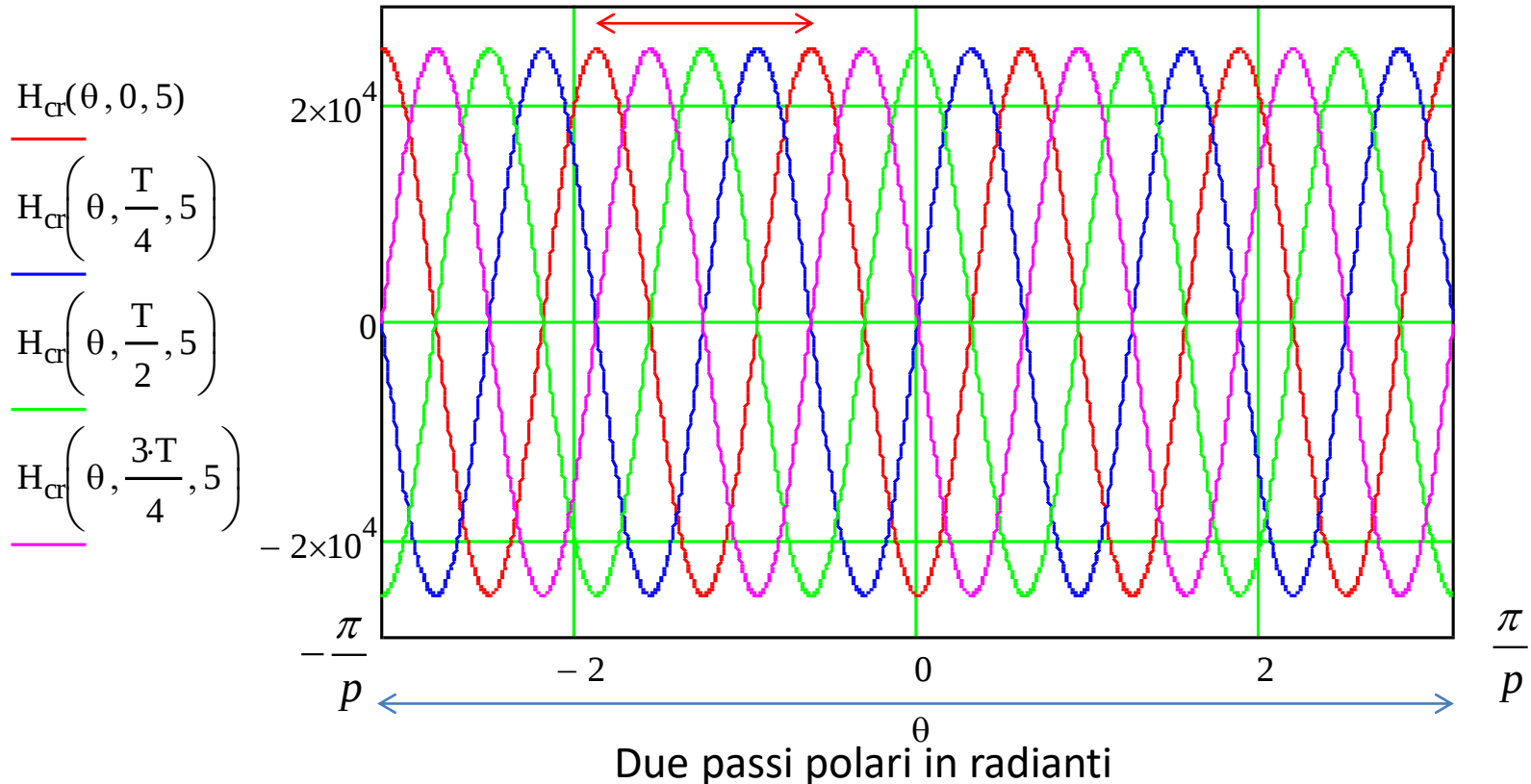


Si vede che la fondamentale ha $p=1$ coppie polari e avanza verso destra, compiendo due passi polari ($2\pi/p$) in un periodo T , cioè ruotando ad una velocità angolare ω/p .

Quinta armonica a diversi istanti di tempo

Velocità di avanzamento

Distanza percorsa in un periodo = $1/n=1/5$ di due passi polari



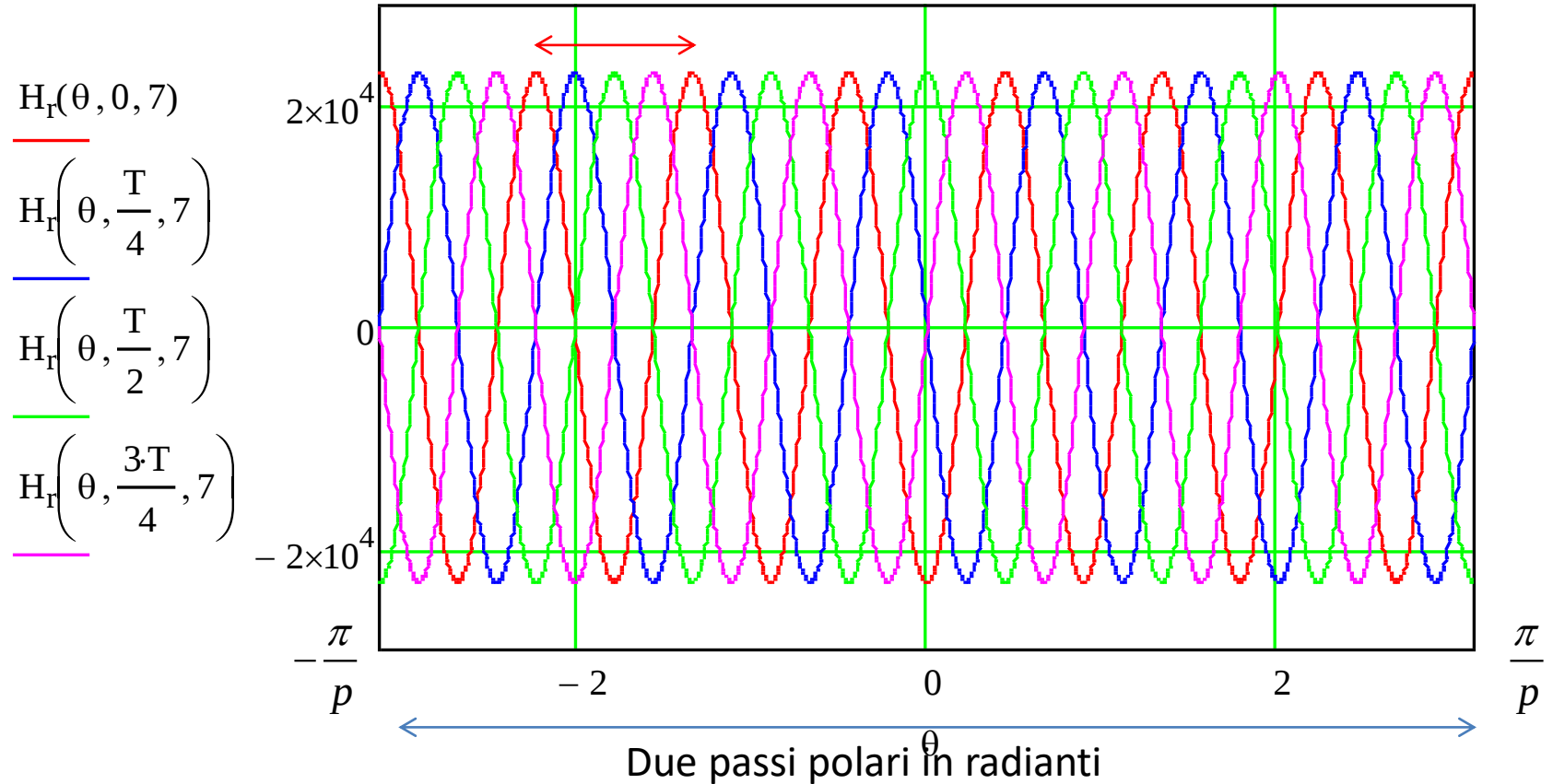
Si vede che la quinta armonica ha $np=5$ coppie polari e avanza verso sinistra, compiendo $2\pi/(pn)$ in un periodo T , cioè ruotando ad una velocità angolare:

$$\omega_n^{\leftarrow} = \frac{2\pi}{pnT} = \frac{2\pi}{pn} \frac{1}{T} = \frac{2\pi f}{pn} = \frac{\omega}{pn}$$

Settima armonica a diversi
istanti di tempo

Velocità di avanzamento

Distanza percorsa in un periodo = $1/n=1/7$ di due passi polari



Si vede che la settima armonica ha $np=7$ coppie polari e avanza verso destra (come la fond.),
compiendo $2\pi/(pn)$ in un periodo T , cioè ruotando ad una velocità angolare:

$$\omega_n^{\rightarrow} = \frac{2\pi}{T} \frac{pn}{1/f} = \frac{2\pi f}{pn} = \frac{\omega}{pn}$$

Di tutte le componenti del campo al traferro, solo la fondamentale è utile ai fini del funzionamento della macchina, cioè generazione di potenza e coppia utile. Tutte le armoniche superiori, sia rotanti come la fondamentale che contro-rotanti, hanno solo effetti parassiti, cioè generano perdite e pulsazioni di coppia.

Pertanto, nel seguito, si consiererà solo la fondamentale del campo al traferro, trascurando le armoniche superiori.

In base a tale approssimazione, da (25'')-(25''') e da (37)-(38) si ha:

$$H_{fase}(\theta) \cong \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} k_{r1} k_{d1} \cos(p\theta) \quad (44)$$

ovvero

$$H_{fase}(\theta) = \frac{i}{g} W_{fase}(\theta) \quad (44')$$

$$W_{fase}(\theta) \cong \frac{2}{\pi} \frac{N_s}{p} k_{r1} k_{d1} \cos(p\theta) \quad (44'')$$

Campo (statico) prodotto da una fase, percorsa da corrente i

$$H(\theta, t) \cong \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} k_{r1} k_{d1} \cos(p\theta - \omega t) \quad (45)$$

Campo (rotante) prodotto da avvolgimento trifase percorso da un sistema simmetrico di correnti di ampiezza I_0 e pulsazione ω

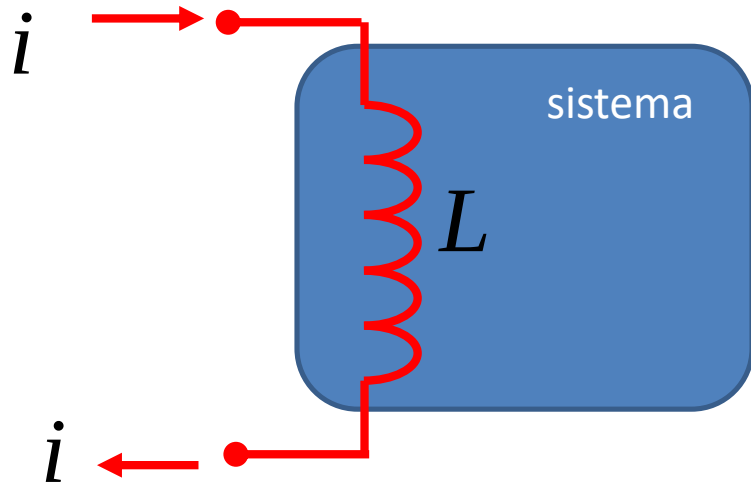
Auto-induttanza di una fase e mutue
induttanze tra fasi dovute al flusso al
traferro

Sulla base dei risultati ottenuti relativamente al campo al traferro prodotto da una fase, si vedrà nel seguito di ricavare le auto e mutue induttanze di fase dovute a tale campo. Queste induttanze vengono definite «magnetizzanti» o «di magnetizzazione» perchè dovute al flusso al traferro (detto a sua volta «magnetizzanti» o «di magnetizzazione»), per distinguerle dalle induttanze dovute al flusso disperso (le cui linee non attraversano il traferro).

Il metodo per ricavare auto e mutue induttanze si basa sul seguente principio fisico: sia dato un sistema lineare (mezzi con caratteristiche B-H lineari), magnetizzato tramite un circuito percorso da corrente i . Vale la relazione:

$$\frac{1}{2} Li^2 = W_m \quad (46)$$

dove L è l'autoinduttanza del circuito e W_m l'energia magnetica immagazzinata nel sistema.



$$W_m = \int_{\text{sistema}} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \quad (47)$$

Fig. 6

$$L = \frac{2W_m}{i^2} \quad (47')$$

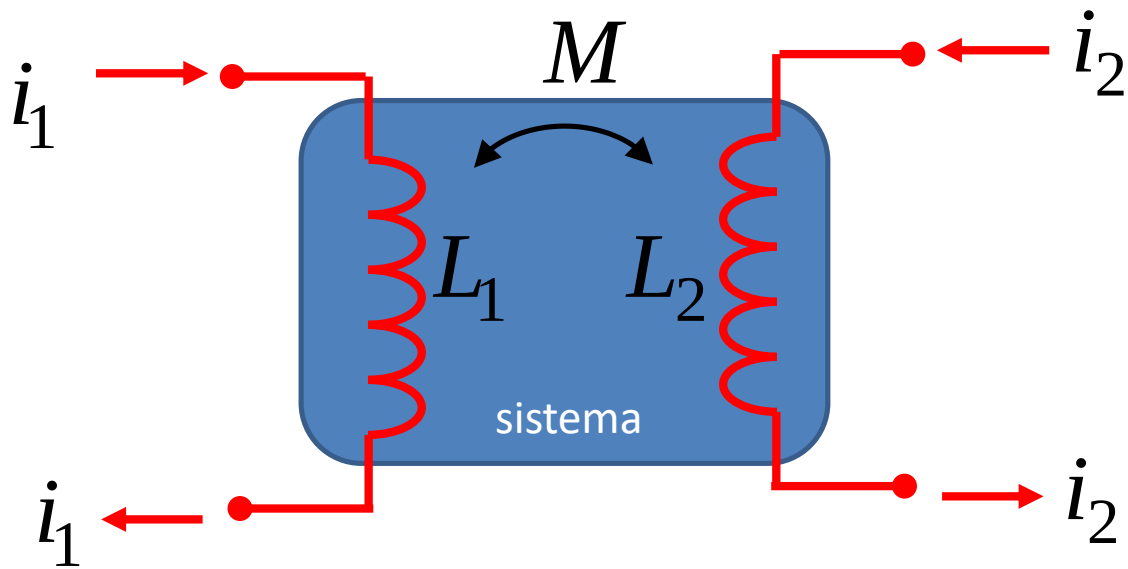


Fig. 7

Se il sistema è alimentato da due circuiti (1 e 2) come sopra, vale la relazione:

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = W_m \quad (48)$$

$$\left(W_m = \int_{\text{sistema}} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \right)$$

In particolare, supponiamo che il sistema sia magneticamente omogeneo e formato da un mezzo con permeabilità magnetica uniforme e costante μ ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ovunque). Supponiamo che la sola corrente i_1 produca un campo magnetico $\mathbf{H}_1$ mentre la sola corrente i_2 produca un campo magnetico $\mathbf{H}_2$. Per il principio di sovrapposizione degli effetti il campo magnetico dovuto a i_1 e i_2 insieme sarà $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ e l'energia magnetica immagazzinata nel sistema sarà:

$$\begin{aligned}
W_m &= \int_{\text{sistema}} \frac{1}{2} (B_1 + B_2) (H_1 + H_2) dV = \frac{\mu}{2} \int_{\text{sistema}} (H_1 + H_2) (H_1 + H_2) dV \\
&= \frac{\mu}{2} \int_{\text{sistema}} (H_1 + H_2)^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\text{sistema}} \mu H_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_{\text{sistema}} \mu H_2^2 dV + \int_{\text{sistema}} \mu H_1 H_2 dV \\
&= \frac{1}{2} \int_{\text{sistema}} H_1 B_1 dV + \frac{1}{2} \int_{\text{sistema}} H_2 B_2 dV + \int_{\text{sistema}} \mu H_1 H_2 dV
\end{aligned} \tag{49}$$

Da (46)-(47), sappiamo che i primi due termini sono rispettivamente uguali $(1/2)L_1 i_1^2$ e $(1/2)L_2 i_2^2$, cioè:

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \int_{\text{sistema}} H_1 B_1 dV + \frac{1}{2} \int_{\text{sistema}} H_2 B_2 dV + \mu \int_{\text{sistema}} H_1 H_2 dV \\
&= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \mu \int_{\text{sistema}} H_1 H_2 dV
\end{aligned} \tag{49'}$$

e dal confronto tra (48) e (49') si conclude che:

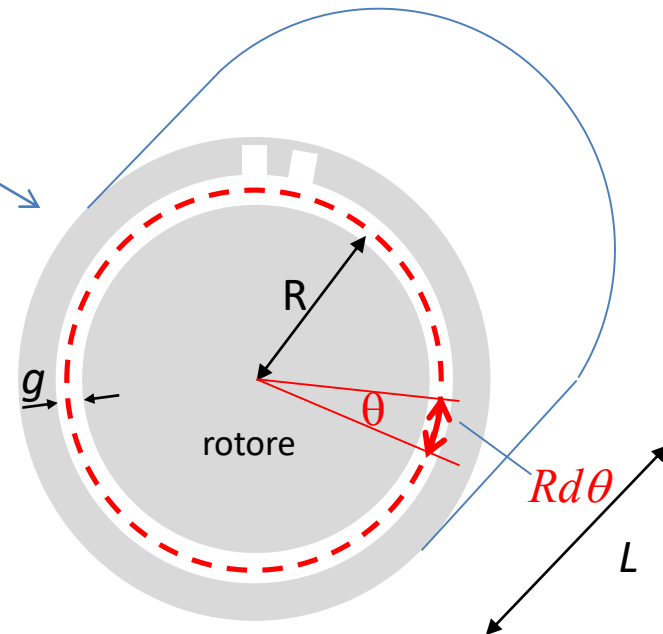
$$M i_1 i_2 = \mu \int_{\text{sistema}} H_1 H_2 dV \tag{50}$$

Nel nostro caso, i circuiti sono le fasi della macchina e il sistema è la macchina stessa. Tuttavia, nell'ipotesi di nuclei magnetici lineari e infinitamente permeabili, il campo H nel ferro è zero e quindi l'energia magnetica è diversa da zero solo nel traferro, che è un mezzo omogeneo con permeabilità $\mu = \mu_0$. Pertanto, per il computo dell'energia magnetica, sarà sufficiente integrare la densità di energia magnetica $(1/2)BH$ sul solo volume del traferro.

Auto-induttanza di una fase

Sia la fase alimentata con corrente i , mentre tutti gli altri circuiti di macchina sono a vuoto. Il campo al traferro sarà dato da (45). L'energia magnetica immagazzinata nel traferro sarà pertanto:

$$\begin{aligned} W_m &= \int_{\text{traferro}} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = \int_{\text{traferro}} \frac{1}{2} (\mu_0 H) H dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{\text{traferro}} H^2 dV \\ &= \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} [H_{fase}(\theta)]^2 \underbrace{L g R d\theta}_{\text{volumetto elementare di traferro}} = \frac{\mu_0}{2} L R \int_0^{2\pi} [H_{fase}(\theta)]^2 g d\theta \end{aligned} \quad (51)$$



Si introduca ora in (51) l'espressione (44')-(44'') del campo prodotto da una fase:

$$\begin{aligned}
 W_m &= \frac{\mu_0}{2} L R \int_0^{2\pi} \left[H_{fase}(\theta) \right]^2 g d\theta = \text{Funzione di avvolgimento della fase} \\
 &= \frac{\mu_0}{2} L R \int_0^{2\pi} \left[\frac{i}{g} W_{fase}(\theta) \right]^2 g d\theta = \frac{\mu_0}{2} L R i^2 \int_0^{2\pi} \frac{\left[W_{fase}(\theta) \right]^2}{g^2} g d\theta \\
 &= \frac{\mu_0}{2} L R i^2 \int_0^{2\pi} \left[W_{fase}(\theta) \right]^2 g^{-1} d\theta \quad (51')
 \end{aligned}$$

In caso di traferro uniforme g sia costante e si potrebbe estrarlo dall'integrale. Tuttavia manteniamo l'espression in questa forma al fine di poterla applicare al caso di traferro non uniforme. A questo punto, dalla (47'):

Auto-induttanza
magnetizzante di
una fase, per
traferro uniforme

$$L_m = \mu_0 L R \int_0^{2\pi} \left[W_{fase}(\theta) \right]^2 g^{-1} d\theta \quad (51'')$$

Vediamo nel seguito come è possibile modellizzare descrivere l'ampiezza di traferro g per macchina a traferro non uniforme, cioè «anisotropa» o «con salienza».

Considerazioni su traferro non uniforme

Nel caso più generale, l'ampiezza del traferro g non è costante ma dipende dalla posizione del rotore. Si veda ad esempio lo schema di Fig. 8, dove:

- s è l'asse (fisso) corrispondente allo zero per la misura degli angoli θ (ad esempio coincidente con l'asse della fase che crea il campo) dato da (44).
- P è un generico punto al traferro, alla coordinata angolare θ
- r è l'asse di simmetria del rotore (asse del polo)
- θ_r è la posizione angolare dell'asse r (rotore) rispetto a s
- θ' è la posizione del punto P rispetto all'asse di rotore r .

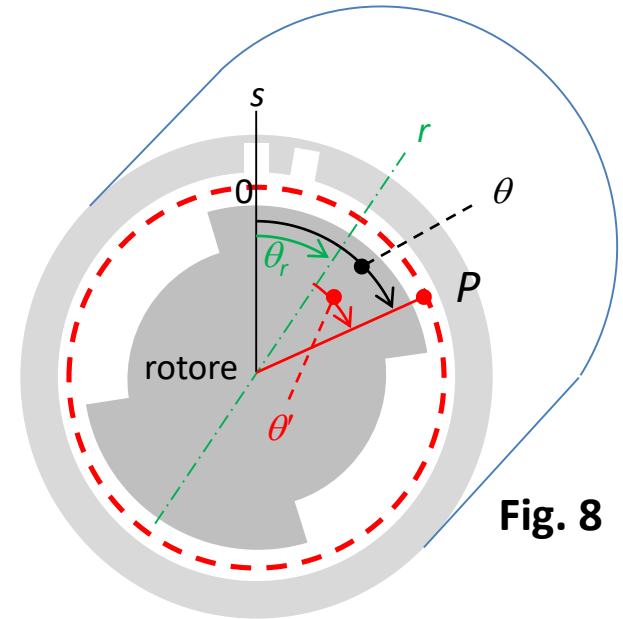


Fig. 8

Come si vede chiaramente da Fig. 8, l'ampiezza del traferro può essere descritta, rispetto all'asse di rotore r , da:

$$g(\theta') = g_0 + \sum_{n=1,3,5,\dots} g_1 \cos(2pn\theta') \quad (52)$$

essendo la funzione pari, simmetrica rispetto al semi-periodo, periodica con periodo pari a un passo polare, cioè π/p .

La non uniformità del traferro viene spesso indicata come «anisotropia» o «salienza». Nell'ipotesi che la salienza non sia molto pronunciata, la (52) si può approssimare troncando al secondo termine dello sviluppo:

$$\begin{aligned}
 g(\theta') &= g_0 + g_1 \cos(2p\theta') \\
 &= g_0 - \Delta g \cos(2p\theta')
 \end{aligned}
 \quad (53)
 \quad \left[\begin{array}{c} g_1 = -\Delta g \end{array} \right]$$

Si vedrà in seguito che Δg è, in generale, positivo per macchine sincrone a rotore avvolto dove sull'asse (polare $\theta'=0$) si ha traferro minimo, positivo per macchine sincrone a magneti permanenti, dove si verifica sull'asse (polare $\theta'=0$) si ha traferro equivalente massimo.

Per quanto segue, si osserva che:

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(\theta') &= \frac{1}{g(\theta')} = \frac{1}{g_0 - \Delta g \cos(2p\theta')} \\
 &= \frac{1}{g_0} \frac{1}{1 - \frac{\Delta g}{g_0} \cos(2p\theta')} \cong \frac{1}{g_0} \left[1 + \frac{\Delta g}{g_0} \cos(2p\theta') \right] = \frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p\theta')
 \end{aligned}
 \quad (54)$$

Per l'approssimazione sopra, valida nel caso di salienza non troppo pronunciata, si è usato lo sviluppo in serie di Talyor seguente, troncato al secondo termine:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

L'ampiezza del traferro e la sua inversa nel punto P a coordinata θ si può ottenere da (53)-(54) considerando che (Fig. 8):

$$\theta' = \theta - \theta_r \quad (55)$$

cioè:

$$g(\theta - \theta_r) = g_0 + g_1 \cos(2p(\theta - \theta_r)) \quad (56)$$

$$g^{-1}(\theta - \theta_r) = \frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \quad (57)$$

Allora nel caso di macchina anisotropa, la (51'') diventa:

$$L_m(\theta_r) = \mu_0 L R \int_0^{2\pi} [W_{fase}(\theta)]^2 g^{-1}(\theta - \theta_r) d\theta \quad (58)$$

in cui si mette in evidenza che l'induttanza è funzione della posizione del rotore θ_r .

Sostituiamo in (58) la (44')-(44'') e la (57):

$$\begin{aligned} L_m(\theta_r) &= \\ &= \mu_0 L R \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{\pi} \frac{N_s}{p} k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\theta) \right]^2 \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \right] d\theta \\ &= \frac{4}{\pi^2} \mu_0 L R \frac{N_s^2 k_{r,1}^2 k_{d,1}^2}{p^2} \int_0^{2\pi} [\cos(p\theta)]^2 \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \right] d\theta \quad (59) \end{aligned}$$

L'integrale in (59) si può sviluppare simbolicamente come segue:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\theta)^2 \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \right] d\theta = \frac{\pi}{g_0} + \frac{\pi \Delta g}{2g_0^2} \cos(2p\theta_r) \quad (60)$$

da cui, sostituendo in (59):

$$L_m(\theta_r) = \frac{4}{\pi} \mu_0 L R \frac{N_s^2 k_{r,1}^2 k_{d,1}^2}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(2p\theta_r) \right] \quad (61)$$

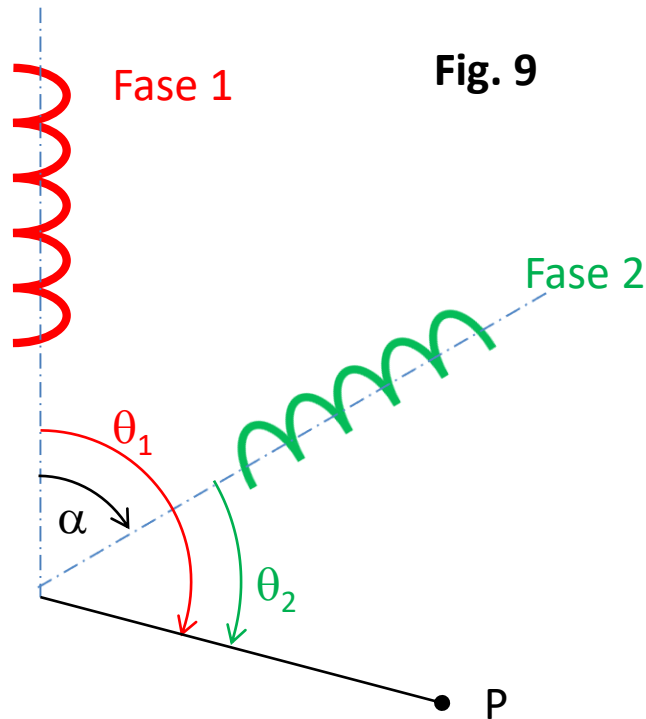
Auto-induttanza di magnetizzazione di una fase per macchina anisotropa

Si nota che

- **per macchina a poli salienti avvolti, dove $\Delta g > 0$ (v. dopo), l'induttanza è massima quanto $\theta_r = 0$, cioè quando l'asse del polo di rotore è allineato con l'asse della fase**
- **per macchina a magneti permanenti interni (anisotrope), dove $\Delta g < 0$ (v. dopo), l'induttanza è minima quanto $\theta_r = 0$, cioè quando l'asse del polo di rotore è allineato con l'asse della fase.**

Mutua induttanza tra due fasi sfasate di un angolo α

Ipotizziamo che le fasi (indicate con «1» e «2») siano collocate nello spazio con uno sfasamento angolare α generico ed alimentate con correnti i_1 e i_2 .



In base alle (44')-(44''), i campi prodotti dalle due fasi sono dati da:

$$H_{fase,1}(\theta_1) = \frac{i}{g} W_{fase,1}(\theta_1) \quad (59)$$

$$H_{fase,2}(\theta_2) = \frac{i}{g} W_{fase,2}(\theta_2) \quad (60)$$

Funzioni di avvolgimento per fasi 1 e 2

dove θ_1 e θ_2 sono le coordinate angolari di un generico punto al traferro P misurate rispettivamente dall'asse della fase 1 e dall'asse della fase 2.

Essendo le due fasi sfasate nello spazio di α ,

$$\theta_2 = \theta_1 - \alpha$$

Considerando tale relazione e rinominando, per semplicità, θ_1 come θ , i due campi (59)-(60) diventano:

$$H_{f_{ase},1}(\theta) = \frac{i}{g} W_{f_{ase},1}(\theta) \quad (61)$$

$$H_{f_{ase},2}(\theta) = \frac{i}{g} W_{f_{ase},2}(\theta - \alpha) \quad (62)$$

Essendo il traferro una regione omogenea con permeabilità magnetica uniforme e costante, la mutua induttanza sarà data dalla (50), con l'integrale esteso al volume del traferro, cioè:

$$Mi_1i_2 = \mu_0LR \int_0^{2\pi} H_{fase,1}(\theta)H_{fase,2}(\theta)gd\theta \quad (63)$$

Usando le (61)-(62'):

$$\begin{aligned}
 Mi_1i_2 &= \mu_0LR \int_0^{2\pi} H_{fase,1}(\theta)H_{fase,2}(\theta)gd\theta = \mu_0i_1i_2LR \int_0^{2\pi} \frac{W_{fase,1}(\theta)W_{fase,2}(\theta-\alpha)}{g^2}gd\theta \\
 &= \mu_0i_1i_2LR \int_0^{2\pi} W_{fase,1}(\theta)W_{fase,2}(\theta-\alpha)g^{-1}d\theta \tag{64}
 \end{aligned}$$



$$M = \mu_0LR \int_0^{2\pi} W_{fase,1}(\theta)W_{fase,2}(\theta-\alpha)g^{-1}d\theta \tag{65}$$

Nel caso di macchina anisotropa, l'inverso della ampiezza di traferro si può esprimere come (57) e per le funzioni di avvolgimento si può usare (44''), ottenendo:

$$\begin{aligned}
M &= \mu_0 LR \int_0^{2\pi} W_{fase,1}(\theta) W_{fase,2}(\theta - \alpha) g(\theta - \theta_r)^{-1} d\theta \\
&= \mu_0 LR \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{\pi} \frac{N_{s1}}{p} k_{r1} k_{d1} \cos(p\theta) \right] \left[\frac{2}{\pi} \frac{N_{s2}}{p} k_{r2} k_{d2} \cos(p(\theta - \alpha)) \right] \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \right] d\theta \\
&= \mu_0 \frac{4}{\pi^2} LR \frac{N_{s1} k_{r1} k_{d1} N_{s2} k_{r2} k_{d2}}{p^2} \int_0^{2\pi} \cos(p\theta) \cos(p(\theta - \alpha)) \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \right] d\theta \quad (66)
\end{aligned}$$

dove N_{s1} , N_{s2} , k_{d1} , k_{d2} , k_{r1} , k_{r2} sono il numero di spire in serie per fase, il coefficiente di raccorciamento e il coefficiente di distribuzione delle fasi 1 e 2.

L'integrale (66) si può sviluppare simbolicamente dando:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\theta) \cos(p(\theta - \alpha)) \left[\frac{1}{g_0} + \frac{\Delta g}{g_0^2} \cos(2p(\theta - \theta_r)) \right] d\theta = \frac{\pi}{g_0} \cos(\alpha p) + \frac{\pi \Delta g}{2g_0^2} \cos(\alpha p - 2p\theta_r)$$

Quindi l'espressione finale per la mutua induttanza è: (67)

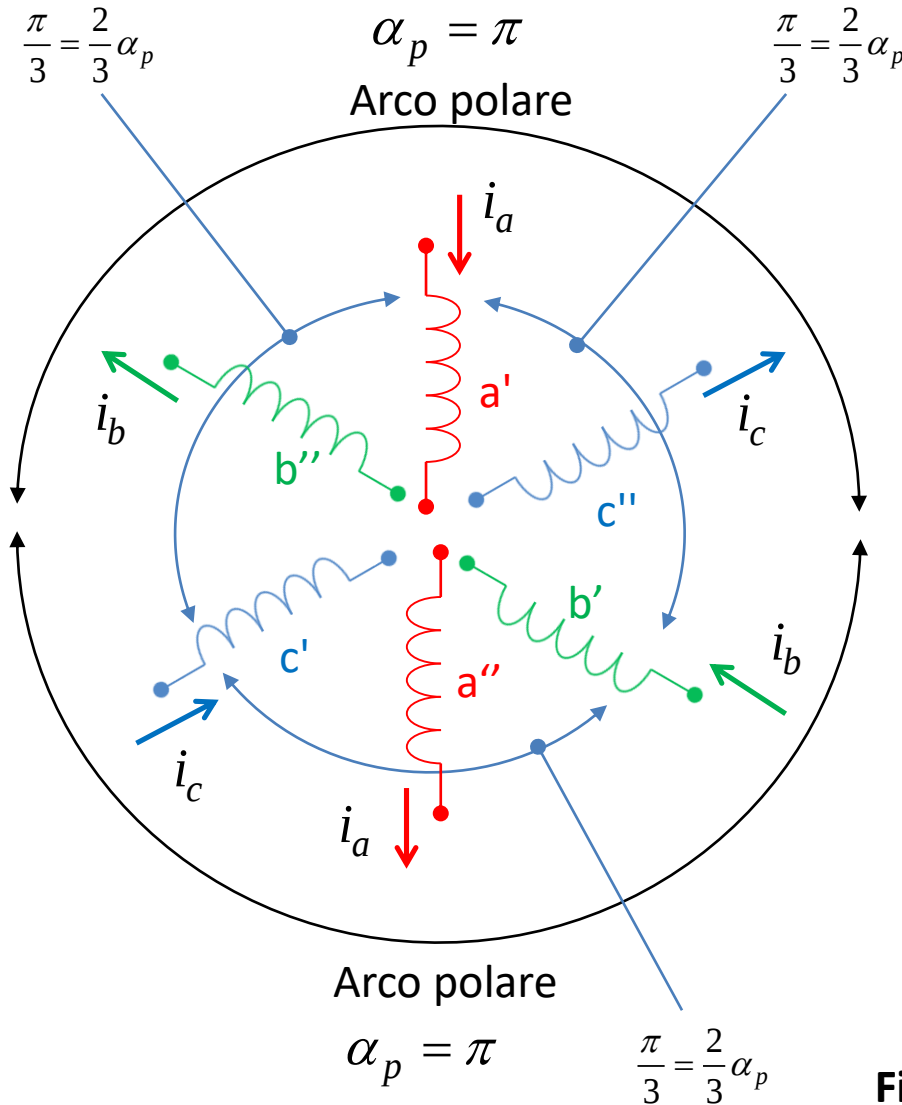
$$M(\theta_r) = \mu_0 \frac{4}{\pi} LR \frac{N_{s1} k_{r1} k_{d1} N_{s2} k_{r2} k_{d2}}{p^2} \left[\frac{1}{g_0} \cos(\alpha p) + \frac{\Delta g}{2g_0^2} \cos(\alpha p - 2p\theta_r) \right] \quad (68)$$

Si constata che, come deve essere, se $\alpha=0$ le due fasi coincidono, per cui in tal caso $L_m=M$ come si vede da (61) e (68).

Caso dei avvolgimento a singolo strato

La schematizzazione dell'avvolgimento trifase a singolo strato è quella mostrata a destra in Fig. 10, nel caso esemplificativo di macchina a due poli.

DOPPIO STRATO



SINGOLO STRATO

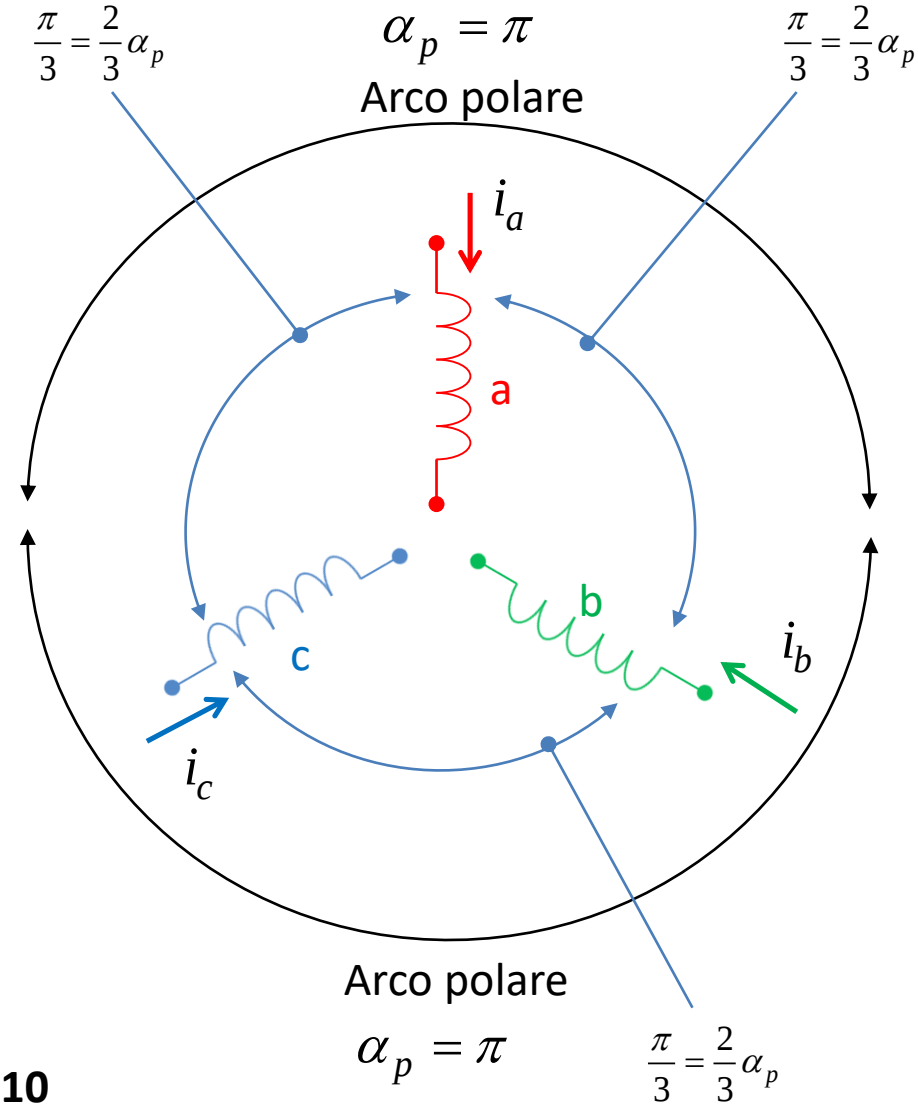
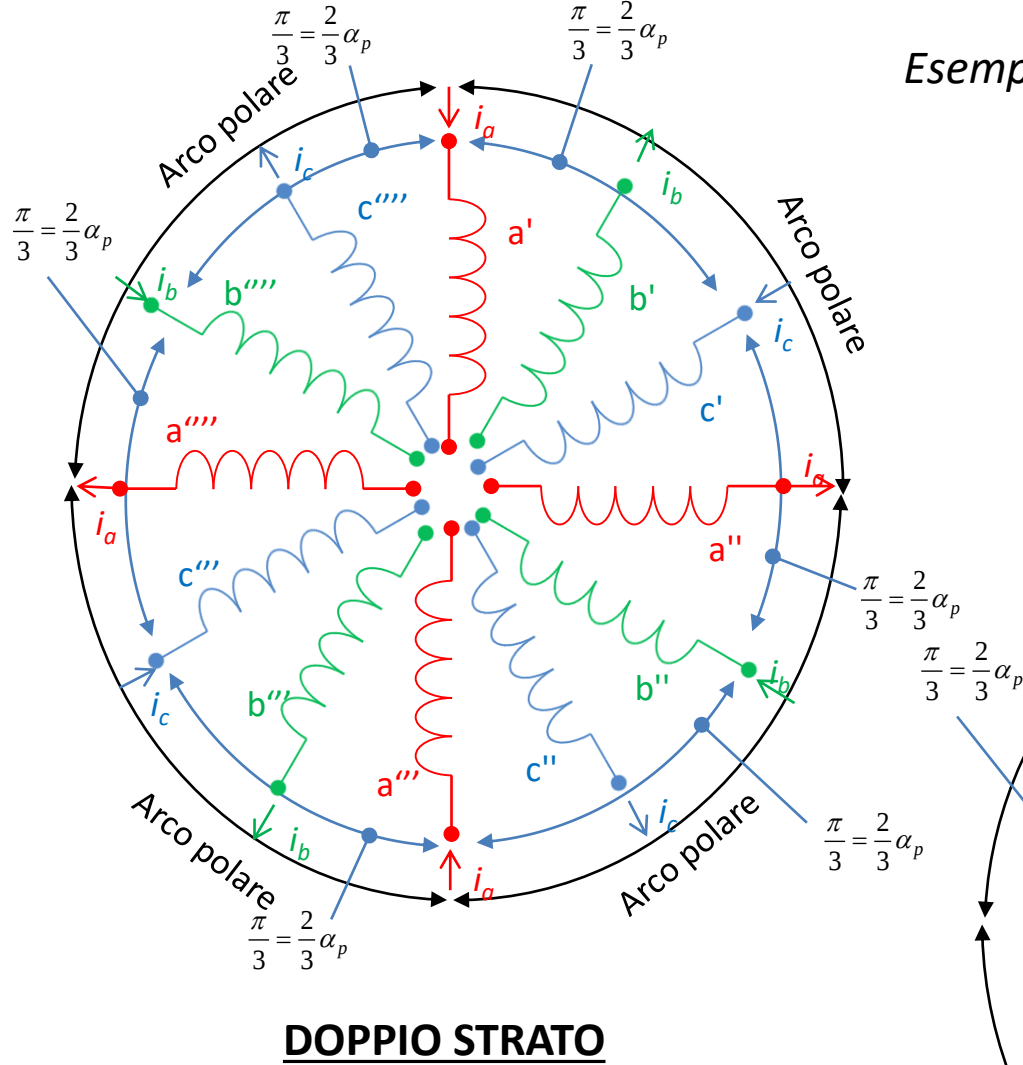


Fig. 10

Esempio di macchina a quattro poli



SINGOLO STRATO

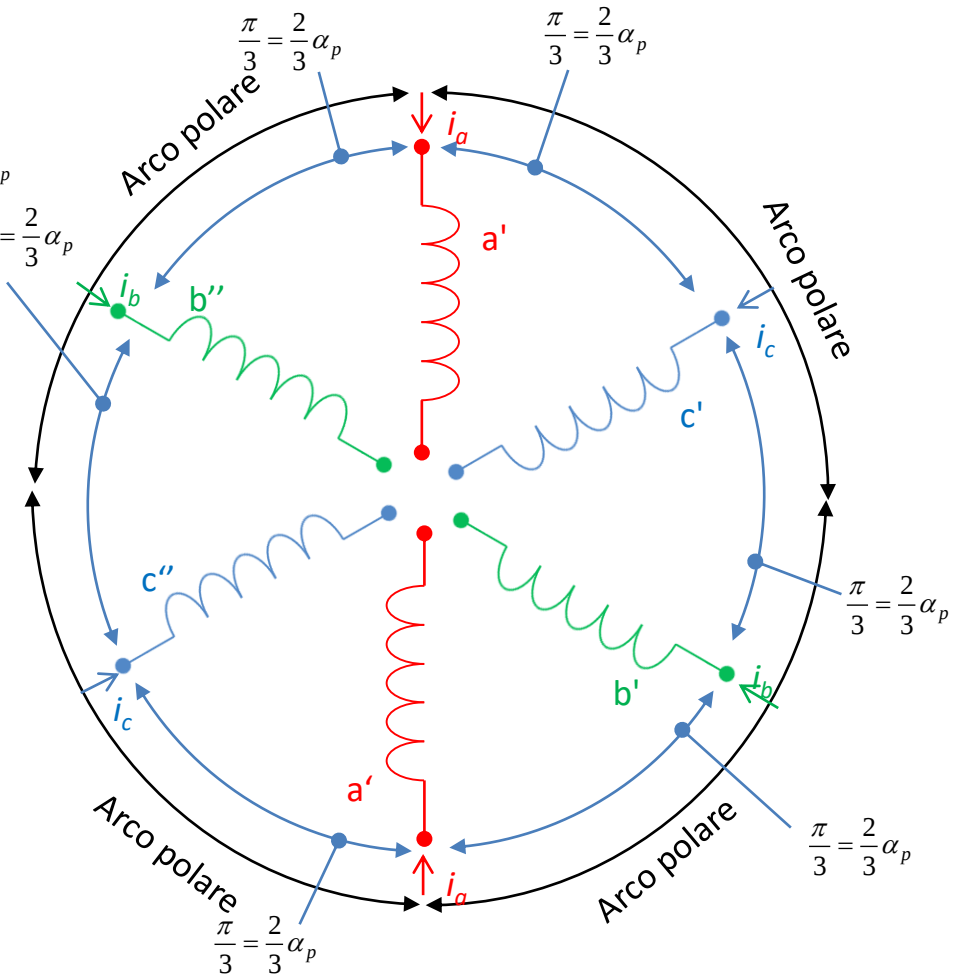
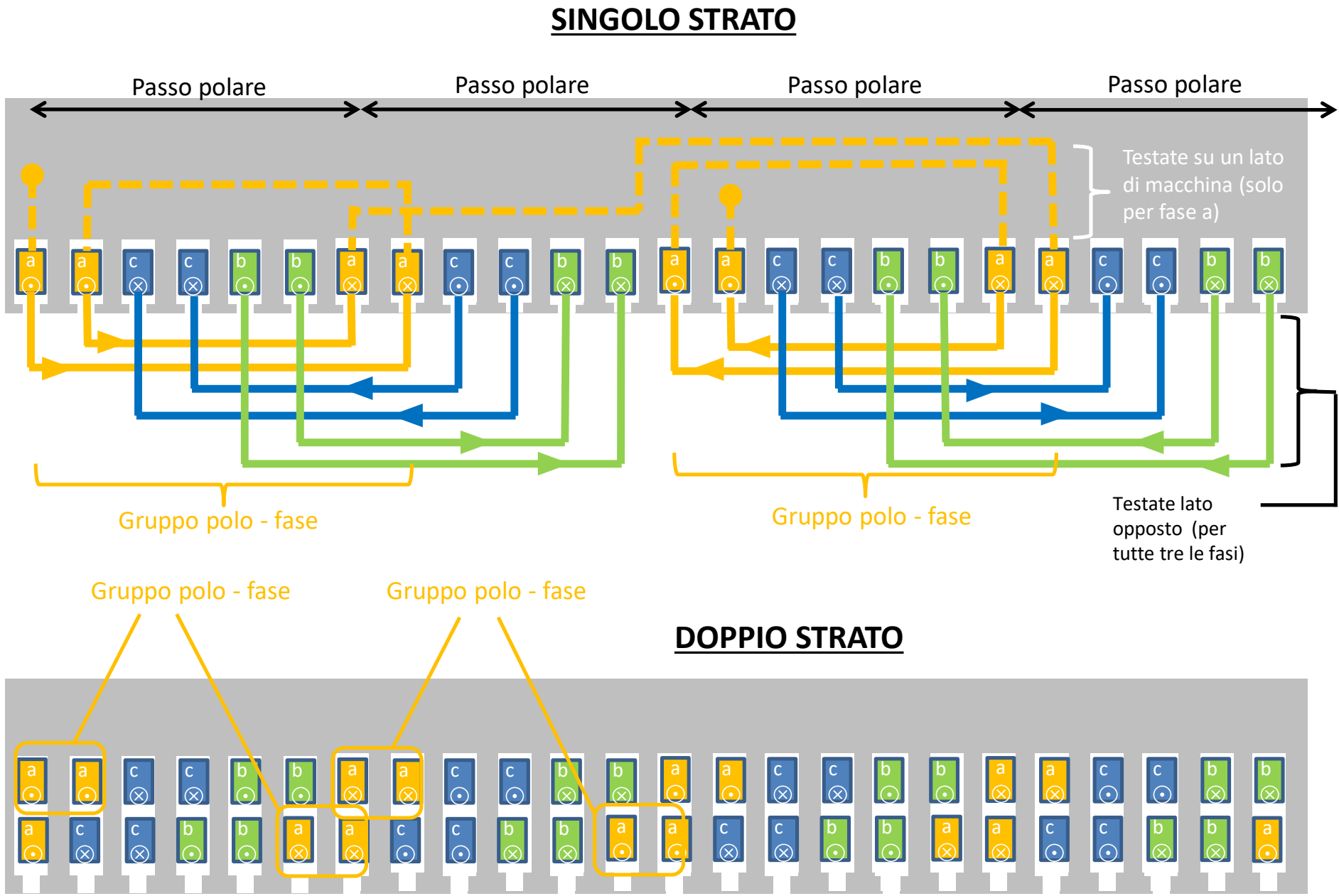


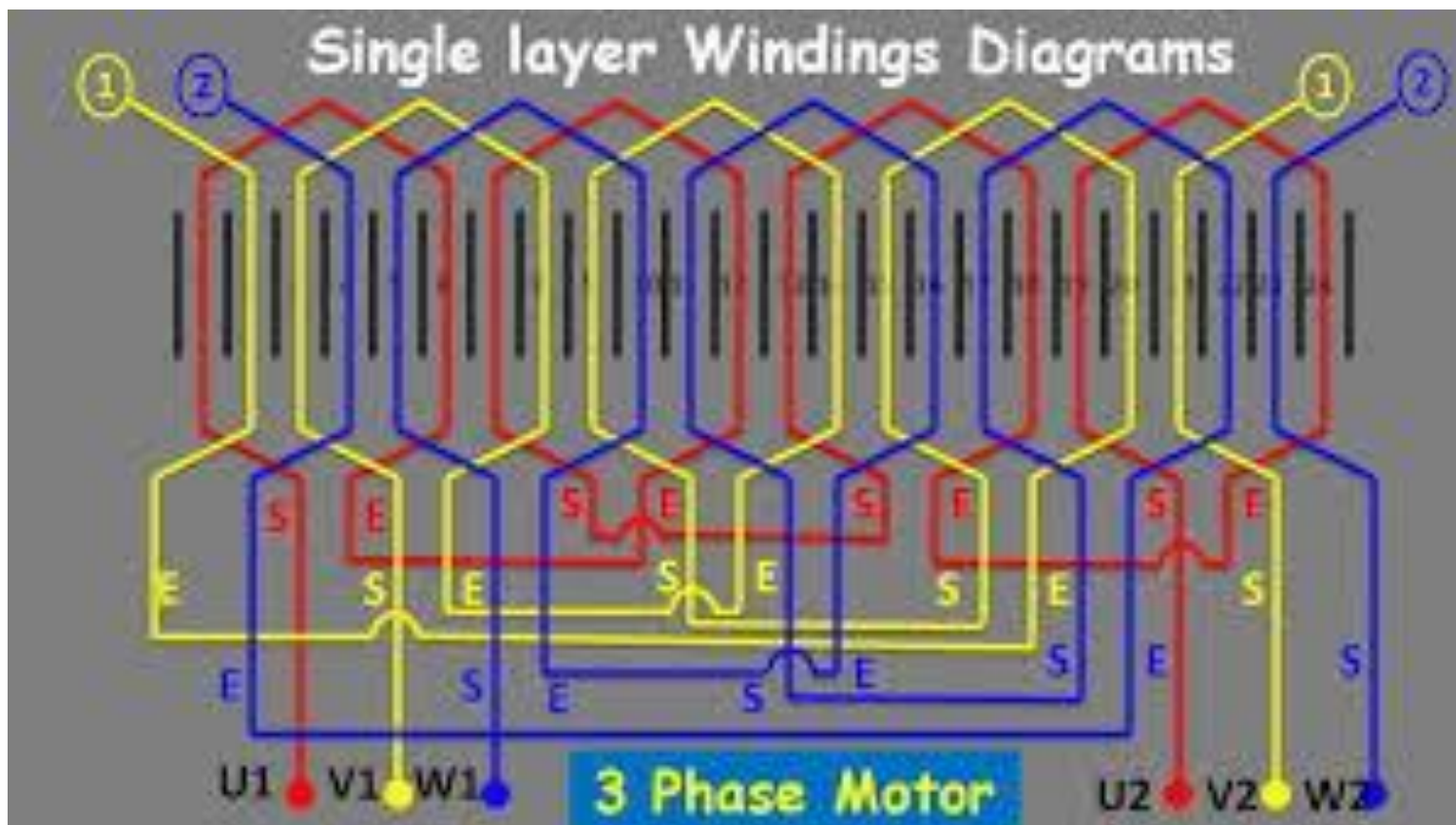
Fig. 11

Esempio nel caso di macchina a $2p=4$ poli, $q=2$ cave polo-fase e $Z=24$ cave.

Fig. 12



Non esiste un modo univoco per collegare i lati attivi
Sotto si vede un'altra possibile soluzione (a bobine non concentriche)



Esempio di soluzione realizzativa



Esempio di soluzione realizzativa



Mentre nell'avvolgimento a doppio strato ogni fase comprende un gruppo di (q) bobine per ogni polo, nell'avvolgimento a singolo strato la fase comprende un gruppo (q) di bobine per ogni coppia di poli.

L'avvolgimento a singolo strato:

- Prevede un singolo lato attivo in ogni cava
- Prevede fasi tra loro sfasate di $2/3$ di passo polare, cioè di 120 gradi elettrici (come per il doppio strato)
- Prevede sempre q cave per polo per fase (come per doppio str.)
- Ogni fase comprende un gruppo di q bobine per ogni coppia di poli
- Non consente la realizzazione con bobine uguali a causa delle inevitabili intersezioni tra testate
- E' normalmente usato in macchine piccole avvolte in filo, per cui le testate possono essere realizzate in modo flessibile e la fase è formata da un singolo filo continuo avvolto in più spire
- Non ammette la realizzazione con passo raccorciato

Relazioni algebriche elementari

Per una macchina a Z cave, N spire per bobina, q cave per polo fase, b rami in parallelo per fase

$$Z = (3q)(2p) = 6pq \quad (\text{come per singolo strato})$$

Nel singolo strato, il numero di bobine di statore è metà del numero di cave Z (mentre per il doppio strato numero di bobine = numero di cave)

Numero di spire in serie per fase:

$$N_s = \left(\frac{Z}{2} \frac{1}{3} \right) \frac{N}{b} = \frac{Z}{6} \frac{N}{b}$$

Bobine per fase



$$N_s = \frac{6pq}{6} \frac{N}{b} = pq \frac{N}{b}$$

$$N = \frac{N_s b}{pq}$$

NB: per il doppio strato si aveva:

$$N = \frac{N_s b}{2pq}$$

Campo prodotto dalle prime bobine di ogni gruppo

Con ragionamento identico a quello usato per il doppio strato si dimostra che il campo al traferro è dato dal diagramma sotto.

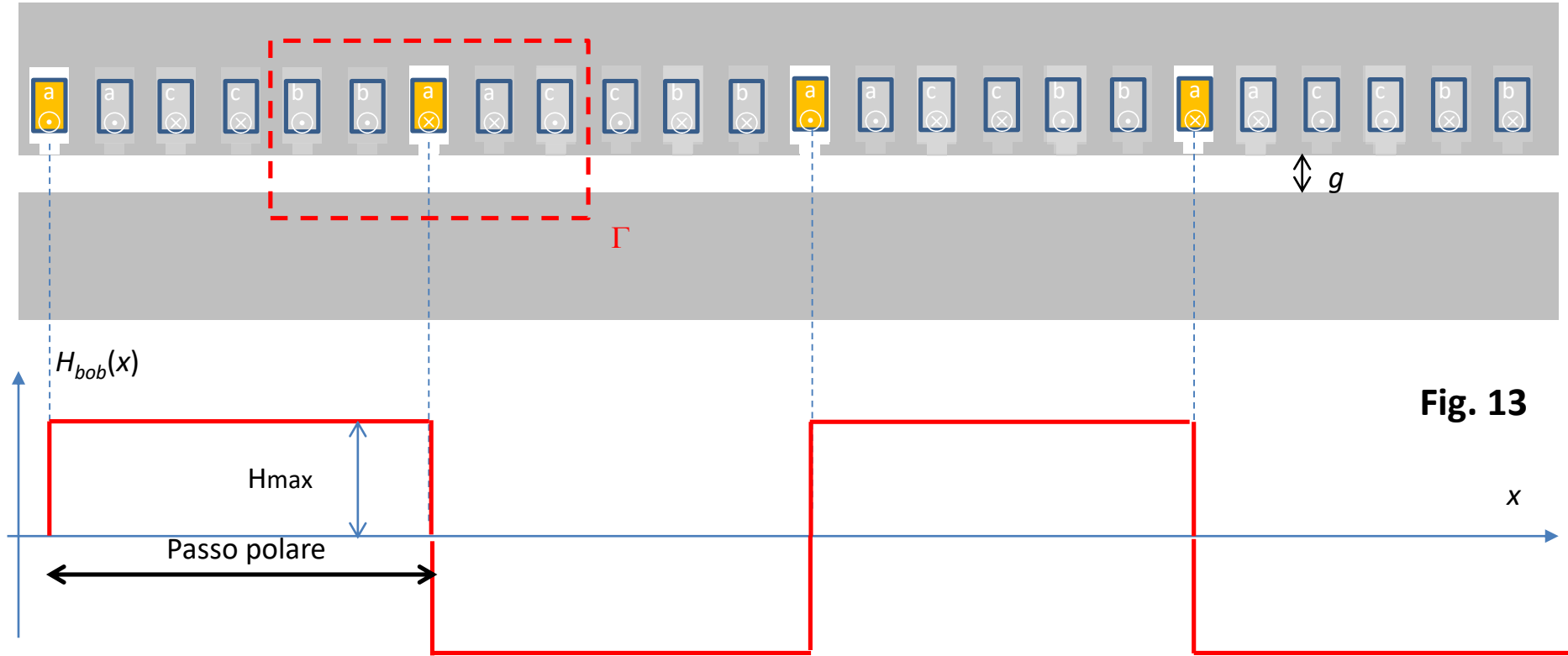


Fig. 13

Tuttavia in questo caso:

$$H_{\max} = \frac{Ni}{2bg} \quad (69)$$

NB: fattore 0.5 rispetto al caso del doppio strato

dove i è la corrente di fase. Infatti, applicando il teorema della circuitazione alla curva Γ :

$$\oint_{\Gamma} H \, ds = 2H_{\max}g = \frac{Ni}{b} \quad (70)$$

Analiticamente, si mostra come per il doppio strato che:

$$H_{bob}(x) = \sum_{n=1,3,5,7...} H_{bob,n} \cos\left(\frac{2\pi}{2\tau_p} nx\right) \quad (71)$$

con:

$$H_{bob,n} = \frac{4}{\pi n} H_{\max} = \frac{4}{\pi n} \frac{Ni}{2bg} = \frac{2}{\pi n} \frac{Ni}{bg} \quad (72)$$

NB: fattore 0.5 rispetto al caso del doppio strato

Sommando su tutte le bobine della fase, come per il doppio strato si dimostra che:

$$H_{fase}(x) = \sum_{k=0,1,2,...,q-1} H_{bob}(x - k\tau_c) = \frac{2}{\pi} \frac{N}{b} \frac{i}{g} \sum_{n=1,3,5,...} \frac{1}{n} \frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \quad (73)$$

Passo cava

NB: fattore 0.5 rispetto al caso del doppio strato

e usando la relazione

$$N = \frac{N_s b}{pq}$$

NB: fattore 2 rispetto al caso del doppio strato

$$H_{fase}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{N_s}{p} \frac{i}{g} \sum_{n=1,3,5,...} \frac{1}{n} \underbrace{\frac{\sin\left(q \frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}{q \sin\left(\frac{n\alpha_{c,e}}{2}\right)}}_{k_{d,n}} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} nx - \xi\right) \quad (74)$$

fase opportuna

NB: rispetto al doppio strato manca il coefficiente di raccorciamento

In definitiva:

$$H_{fase}(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g} \frac{N_s}{p} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{k_{d,n}}{n} \cos(pn\theta) \quad (75)$$

NB: stessa espressione che nel singolo strato a meno del coefficiente di raccorciamento

Di conseguenza, anche il campo rotante prodotto da una terna simmetrica di correnti di ampiezza I_0 ha la stessa espressione che nel caso del singolo strato, cioè:

$$H(\theta, t) = H_{fund}(\theta, t) + \sum_{n=7,13,19,\dots} H_n^{\rightarrow}(\theta, t) + \sum_{n=5,11,17,\dots} H_n^{\leftarrow}(\theta, t)$$

$$H_{fund}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\theta - \omega t)$$

$$H_n^{\rightarrow}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta - \omega t)$$

$$H_n^{\leftarrow}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta + \omega t)$$

Con i significanti visti sopra.

In definitiva, dal punto di vista della generazione del campo rotante, l'avvolgimento a singolo strato è del tutto equivalente a quello a doppio strato, a meno del fatto che non consente la realizzazione del raccorciamento di passo.

Si nota che il raccorciamento di passo, se opportunamente scelto, è benefico

- 1) perchè consente di ridurre la dimensione delle testate (e quindi il peso dell'avvolgimento e le relative perdite)
- 2) perchè permette di abbattere alcuni campi armonici (specie di 5° e 7° ordine) a fronte di una riduzione modesta della fondamentale.

Il punto 2) vale anche per il coefficiente di distribuzione, che vale sia per il singolo che per il doppio strato.

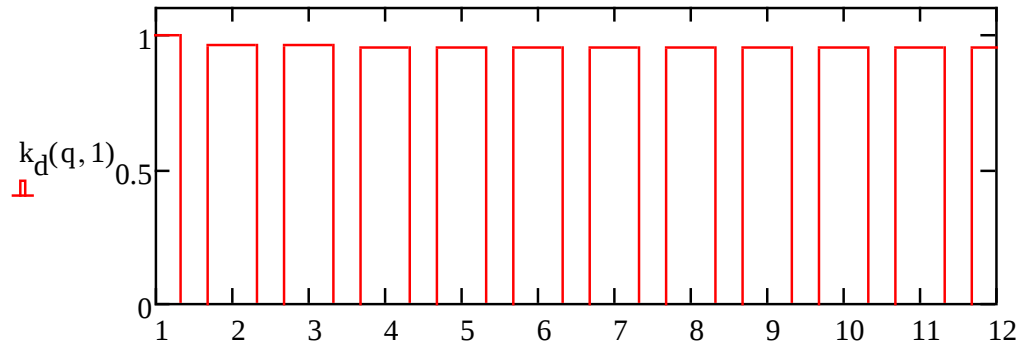
$$H_{fund}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\theta - \omega t)$$

$$H_n^{\rightarrow}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta - \omega t)$$

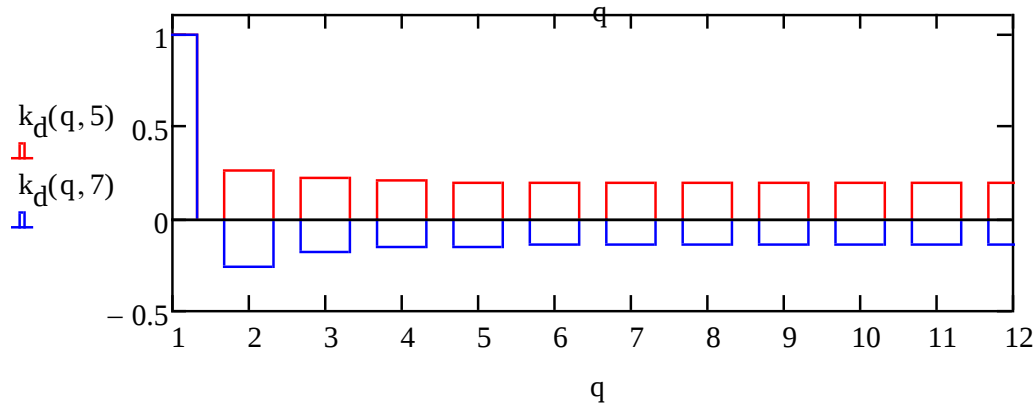
$$H_n^{\leftarrow}(\theta, t) = \frac{3}{\pi} \frac{I_0}{g} \frac{N_s}{p} \frac{k_{r,n} k_{d,n}}{n} \cos(np\theta + \omega t)$$

Di conseguenza, visto il procedimento seguito per il calcolo delle auto e delle mutue induttanze in avvolgimento a doppio strato, si deduce che, essendo i campi magneti prodotti uguali, anche le auto e mutue induttanze di fase, per avvolgimento a singolo strato, hanno la stessa espressione trovata per avvolgimenti a doppio strato.

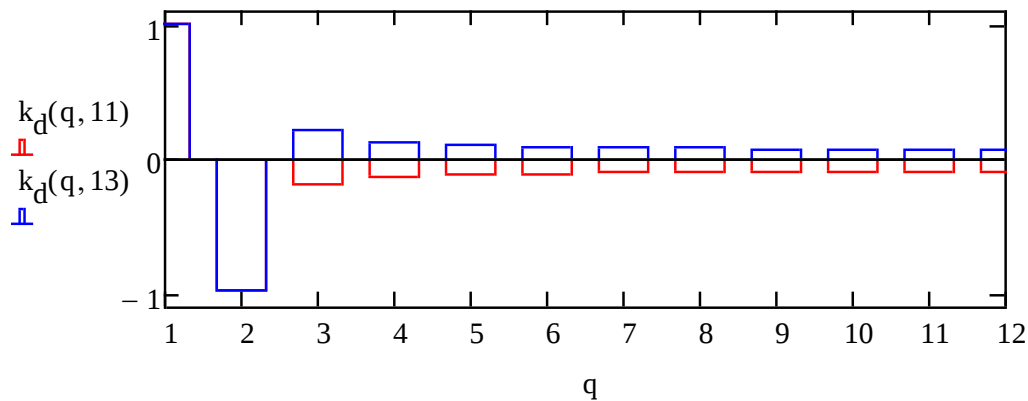
$$k_d(q, n) := \frac{\sin\left(\frac{n \cdot \pi}{6}\right)}{q \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{6 \cdot q}\right)}$$



Effetto della scelta di q sulla
fondamentale

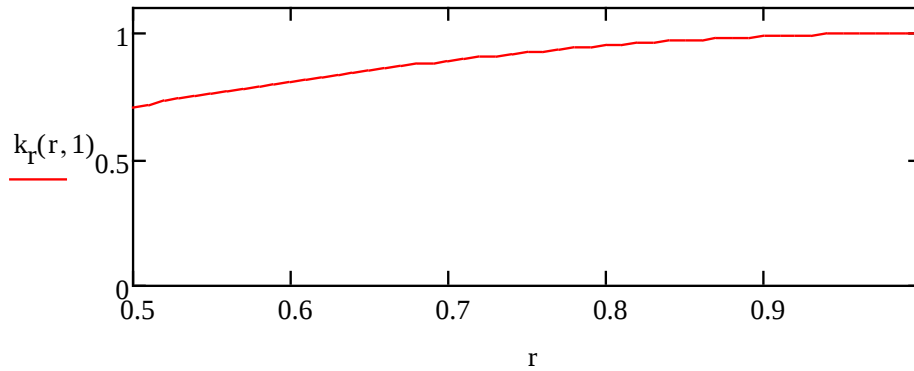


Effetto della scelta di q sulla 5a
7a armonica (importante avere
 $q > 1$ ove possibile)

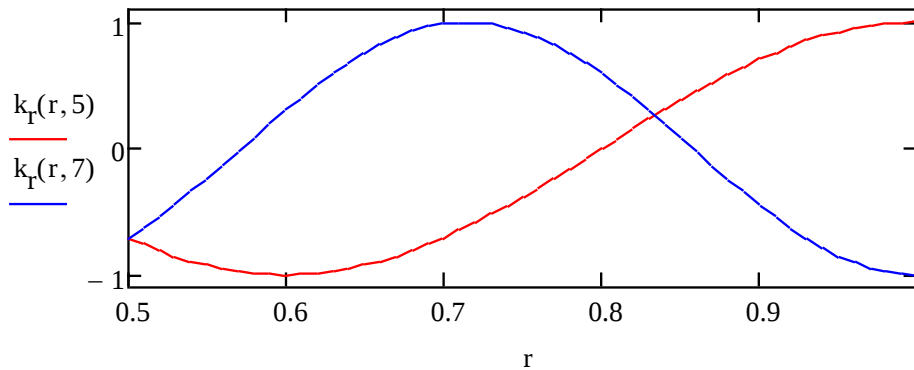


Effetto della scelta di q sulla
11a 13a armonica (importante
avere $q > 2$ ove possibile)

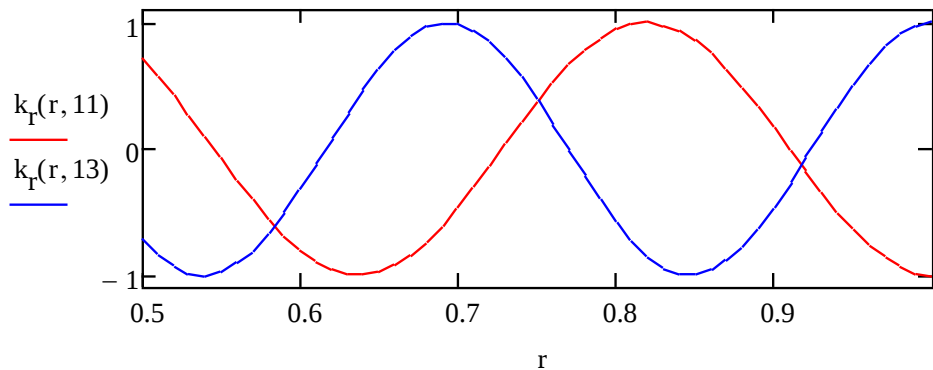
$$k_I(r, n) := \sin\left(\frac{n \cdot r \cdot \pi}{2}\right)$$



Effetto del raccorciamento di
passo sulla fondamentale



Effetto del raccorciamento di
passo sulla 5a 7a armonica
(0.83 realizza un buon
compromesso)



Effetto del raccorciamento di
passo sulla 11a 13a armonica