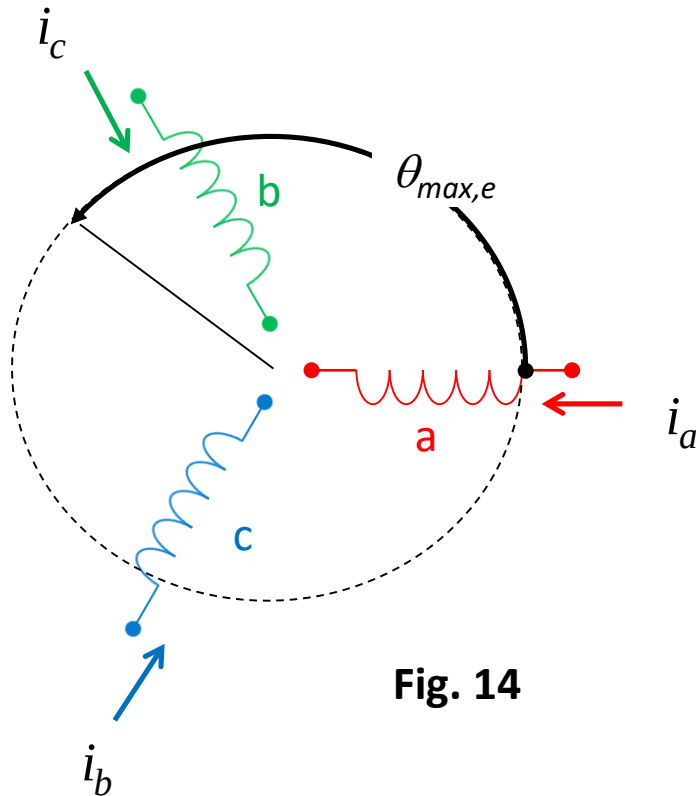


# Trasformazioni di Clarke e Park

## Vettore spaziale associato ad una terna di correnti



**Fig. 14**

NB: il riferimento di zero per la misura degli angoli è identificato, convenzionalmente, con l'asse della fase «a», cioè  $\theta_e=0$  identifica la posizione dell'asse «a».

Consideriamo un avvolgimento trifase con fasi a, b, c percorse da generiche correnti  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$ .

Per astrarre dalla polarità, ragioniamo in angoli elettrici, il che equivale a considerare la situazione su un doppio passo polare.

In questo senso, le tre fasi sono sfasate di 120 gradi elettrici.

Il problema che ci si pone è:

- In che punto (cioè per quale angolo elettrico  $\theta_{max,e}$ ) la fondamentale del campo magnetico risultante è massima?
- Qual è il valore massimo della fondamentale del campo magnetico risultante?

Per quanto visto sopra (sia per avvolgimento a doppio che a singolo strato) e visto che si è preso come riferimento di zero per la misura degli angoli l'asse della fase  $a$ , la fondamentale del campo risultante prodotto dalle tre correnti è:

$$H(\theta_e, t) = \frac{i_a(t)}{g} W_{fase}(\theta_e) + \frac{i_b(t)}{g} W_{fase}\left(\theta_e - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{i_c(t)}{g} W_{fase}\left(\theta_e - \frac{4}{3}\pi\right) \quad (76)$$

con funzione di avvolgimento data da:

$$W_{fase}(\theta_e) = W_{\max} \cos(\theta_e) \quad W_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{N_s}{p} k_{r,1} k_{d,1}$$

Per prescindere dall'ampiezza – uniforme o meno – del traferro, spesso si ragiona in termini di «campo di forza magnetomotrice», definito come:

$$fmm(\theta_e, t) = \frac{H(\theta_e, t)}{g} = i_a(t) W_{\max} \cos(\theta_e) + i_b(t) W_{\max} \cos\left(\theta_e - \frac{2}{3}\pi\right) + i_c(t) W_{\max} \cos\left(\theta_e - \frac{4}{3}\pi\right) \quad (77)$$

La fmm in un certo punto è tale per cui, moltiplicandola per l'ampiezza del traferro nello stesso punto, si trova il campo magnetico nel punto stesso.

In pratica il problema è quello di trovare il massimo della fmm risultante e il punto in cui cade tale massimo. A tale scopo si può scrivere la (77) come:

$$fmm(\theta_e, t) = W_{\max} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\theta_e} \underbrace{\left[ i_a(t) e^{j0} + i_b(t) e^{-\frac{2}{3}\pi j} + i_c(t) e^{-\frac{4}{3}\pi j} \right]}_{\bar{i}^*(t)} \right\} = W_{\max} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\theta_e} \bar{i}^*(t) \right\} \quad (78)$$

Dove si è introdotto il numero complesso (= vettore nel piano complesso), di ampiezza  $i(t)$  e fase  $\alpha(t)$

$$\begin{aligned}\bar{i}(t) &= i(t)e^{j\alpha(t)} \triangleq \left[ i_a(t)e^{j0} + i_b(t)e^{-\frac{2}{3}\pi j} + i_c(t)e^{-\frac{4}{3}\pi j} \right]^* \\ &= i_a(t)e^{j0} + i_b(t)e^{\frac{2}{3}\pi j} + i_c(t)e^{\frac{4}{3}\pi j}\end{aligned}\quad (79)$$

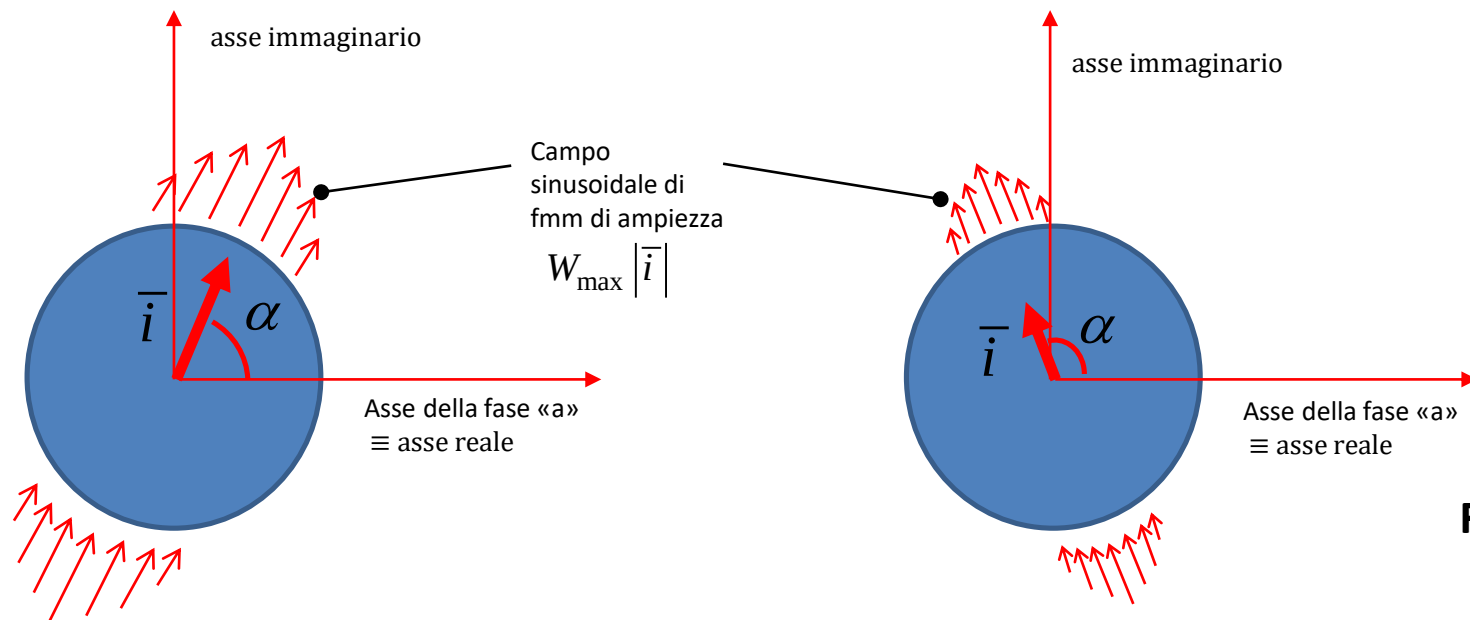
Si definisce «vettore spaziale» associato alla terna di correnti istantanee  $i_a, i_b, i_c$ . **Il suo modulo identifica l'ampiezza della fmm risultante, la sua fase indica l'angolo in cui tale massimo cade. Il vettore spaziale si definisce pertanto «vettore spaziale» in quanto definisce la distribuzione istantanea nello spazio della f.m.m. dovuta ad una certa terna di correnti.** Infatti da (78) e (79):

$$fmm(\theta_e, t) = W_{\max} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\theta_e} \bar{i}^*(t) \right\} = W_{\max} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\theta_e} i(t) e^{-j\alpha(t)} \right\} = \underline{W_{\max} i(t) \cos(\theta_e - \alpha(t))} \quad (80)$$

Sinusoide di ampiezza  $W_{\max} i(t)$  con valor massimo nel punto  $\theta_e = \alpha$ .

**L'interpretazione fisica del vettore spaziale di corrente è quindi molto semplice, nel senso che tale vettore identifica direzione, verso e intensità della fmm prodotta dalla terna di correnti.**

**Ciò è rappresentato graficamente in Fig. 15 per due posizioni ed ampiezze diverse del vettore spaziale di corrente.**



**Fig. 15**

Il concetto di vettore spaziale si può per analogia estendere anche ad altre grandezze elettriche trifase (flussi concatenati e tensioni) anche se l'interpretazione fisica in questo caso non è intuitiva.

Esempio:

$$\bar{v}(t) = v_a(t)e^{j0} + v_b(t)e^{\frac{2}{3}\pi j} + v_c(t)e^{\frac{4}{3}\pi j} \quad (81)$$

Si nota che, per un generico andamento tempo temporale delle grandezze di fase, vettore spaziale cambia sia in ampiezza che in modulo.

**Tuttavia, se le tre grandezze (ad es. correnti) formano una terna sinusoidale simmetrica diretta di ampiezza  $I_0$  e pulsazione  $\omega$ , allora il corrispondente vettore spaziale è costante in modulo, con modulo pari a  $(3/2) I_0$ , e ruota con velocità costante pari a  $\omega$  con verso coincidente con il senso ciclico delle fasi.**

Ricordiamo la definizione di **fasore** associato alla terna di correnti sinusoidali simmetriche:

$$\begin{cases} i_a(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \\ i_b(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right) \\ i_c(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{fasore complesso} \\ \bar{I} = I_0 e^{j\phi} \end{array}$$

Si comprende quindi che il vettore spaziale (82') per terna simmetrica sinusoidale, è strettamente legato al suo fasore, precisamente dalla relazione:

$$\bar{i}(t) = \frac{3}{2} I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{3}{2} e^{j\omega t} (I_0 e^{j\phi}) = \frac{3}{2} e^{j\omega t} \bar{I} = \frac{3}{2} \bar{I} e^{j\omega t}$$

$$\bar{i}(t) = \frac{3}{2} \bar{I} e^{j\omega t}$$

(82'')

Vettore spaziale

Fasore

Infatti in tal caso la (79) dà:

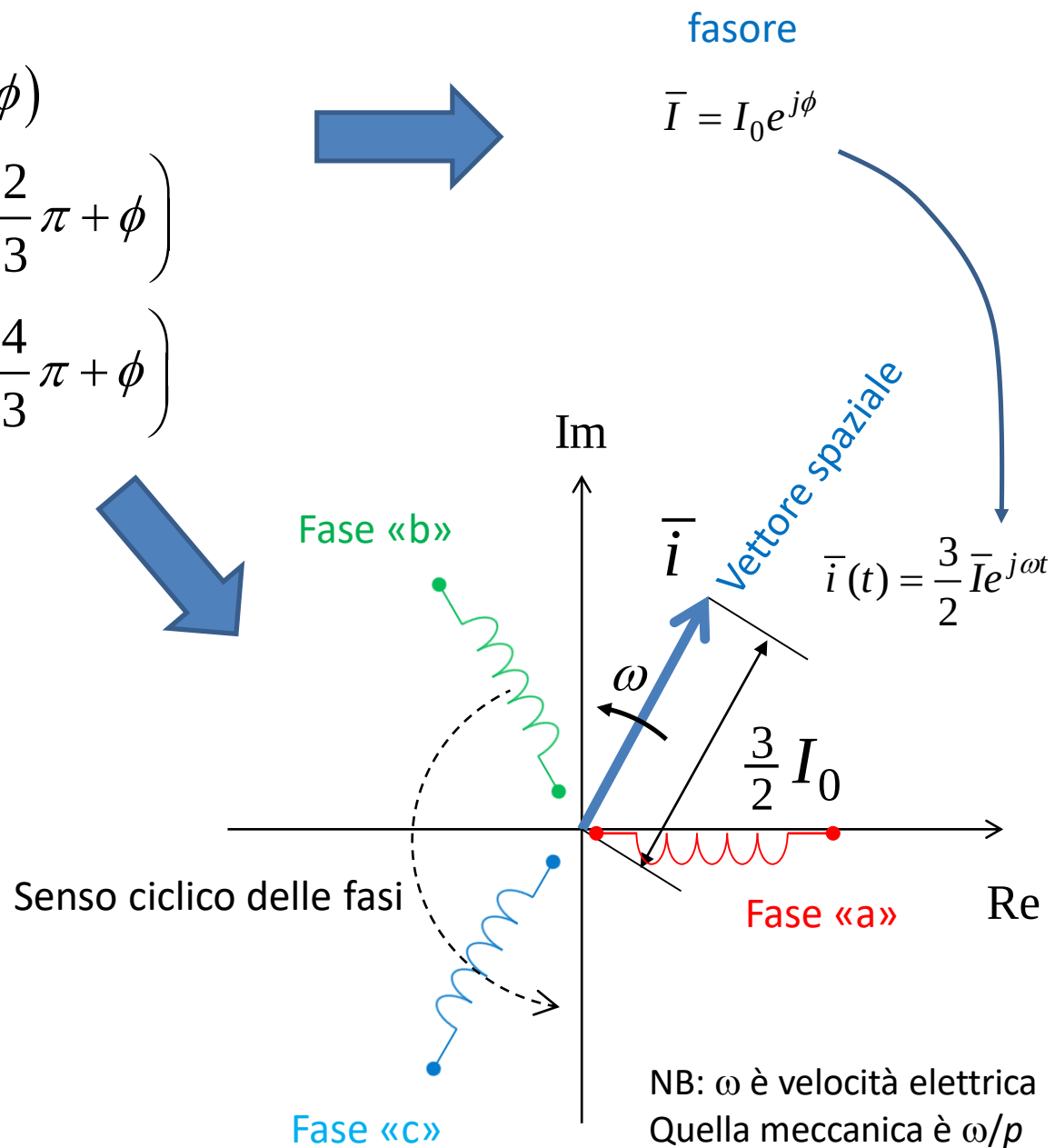
$$\bar{i}(t) = i(t)e^{j\alpha(t)} = I_0 \cos(\omega t + \phi)e^{j0} + I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right)e^{\frac{2}{3}\pi j} + I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right)e^{\frac{4}{3}\pi j} \quad (82)$$

Fase iniziale

e, usando l'identità:  $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$$\begin{aligned} \bar{i}(t) &= I_0 \frac{e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)}}{2} e^{j0} + I_0 \frac{e^{j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right)}}{2} e^{\frac{2}{3}\pi j} + I_0 \frac{e^{j\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right)}}{2} e^{\frac{4}{3}\pi j} \\ &= \frac{I_0}{2} \left\{ \left[ e^{j(\omega t + \phi)} + e^{j(\omega t + \phi)} + e^{j(\omega t + \phi)} \right] + \left[ e^{j(-\omega t - \phi)} + e^{j\left(-\omega t + \frac{4}{3}\pi - \phi\right)} + e^{j\left(-\omega t + \frac{8}{3}\pi - \phi\right)} \right] \right\} \\ &= \frac{I_0}{2} \left\{ 3e^{j(\omega t + \phi)} + \underbrace{\left[ e^{j(-\omega t - \phi)} + e^{j\left(-\omega t - \frac{2}{3}\pi - \phi\right)} + e^{j\left(-\omega t + \frac{2}{3}\pi - \phi\right)} \right]}_{=0 \text{ in quanto fasori sfasati di } 120^\circ} \right\} = \frac{3}{2} I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \end{aligned} \quad (82')$$

$$\begin{cases} i_a(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \\ i_b(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right) \\ i_c(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right) \end{cases}$$



**Fig. 16**



Questo risultato conferma quello già trovato in precedenza sul campo rotante, limitatamente alla fondamentale del campo stesso, cioè: una terna simmetrica equilibrata di correnti, percorrendo le fasi di un avvolgimento trifase, determina una fondamentale di campo avente ampiezza costante e velocità elettrica di rotazione angolare pari alla pulsazione delle correnti.

Si nota che, similamente agli angoli, la velocità elettrica è definita come velocità meccanica moltiplicata per il numero di coppie polari.

La trattazione più dettagliata proposta all'inizio non è ridondante in quanto tiene conto anche delle armoniche di campo superiori, mentre il concetto di vettore spaziale presuppone di trascurare tali armoniche e di considerare solo la fondamentale di campo.

---

Date le tre correnti di alimentazione, oltre al vettore spaziale ad esse associato, è utile considerare un'altra grandezza costituita dalla cosiddetta «**componente omopolare**» definita da:

$$i_{omo}(t) \triangleq i_a(t) + i_b(t) + i_c(t)$$

(84)

Tale componente è normalmente nulla (si pensi ad avvolgimento connesso a stella e con centro stella isolato). Tuttavia, può in alcuni casi essere diversa da zero e può avere interesse studiarne gli effetti e il comportamento dinamico.

La stessa definizione (84) di componente omopolare si estende anche alle altre grandezze elettriche trifase (flussi concatenati, tensioni).

## Trasformazione di Clarke (da $abc$ ad $\alpha\beta 0$ )

Il problema di determinare, data una terna di grandezze elettriche trifase, il corrispondente vettore spaziale e la corrispondente componente omopolare, può essere approssciato in modo sintetico attraverso la cosiddetta trasformazione di Clarke.

Per definirla, raggruppiamo le tre correnti (istantanee) di fase in un vettore (colonna):

$$\mathbf{i}_{abc} = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad (85) \quad \text{Vettore delle correnti di fase}$$

e introduciamo una trasformazione (o mappa) lineare (detta «trasformazione di Clarke») definita dalla seguente matrice:

$$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (86) \quad \text{Matrice della trasformazione di Clarke}$$

Il vettore trasformato delle correnti è definito come:

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \triangleq \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{C} \mathbf{i}_{abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} i_a - \frac{1}{2}i_b - \frac{1}{2}i_c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i_b - \frac{\sqrt{3}}{2}i_c \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i_a + \frac{1}{\sqrt{2}}i_b + \frac{1}{\sqrt{2}}i_c \end{pmatrix} \quad (87)$$

**Per quanto riguarda l'ultima componente di  $\mathbf{i}_{\alpha\beta 0}$ , è evidente che rappresenta la componente omopolare moltiplicata per  $1/\sqrt{3}$**

Per quanto riguarda le prime due componenti del vettore trasformato, cioè  $i_\alpha$  e  $i_\beta$ , esse formano a loro volta un vettore dato da:

$$\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} i_a - \frac{1}{2}i_b - \frac{1}{2}i_c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i_b - \frac{\sqrt{3}}{2}i_c \end{pmatrix} \quad (88)$$

Per comprenderne il significato, consideriamo ora, da (79), l'espressione del vettore spaziale associato alla terna  $i_a, i_b, i_c$ :

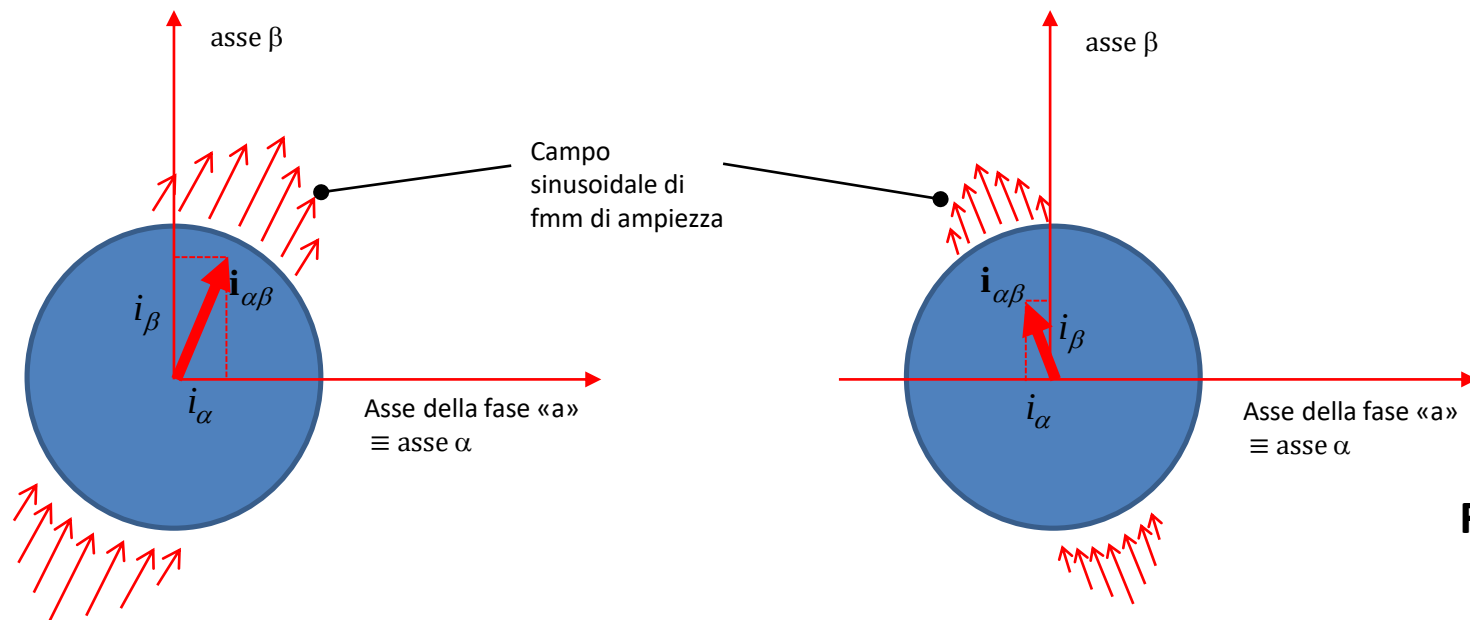
$$\bar{i} = i_a \cdot 1 + i_b \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i_c \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left( i_a - \frac{1}{2}i_b - \frac{1}{2}i_c \right) + j \left( \frac{\sqrt{3}}{2}i_b - \frac{\sqrt{3}}{2}i_c \right) \quad (89)$$

Dal confronto tra (88) e (89):

$$i_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{\bar{i}\}, \quad i_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Im}\{\bar{i}\} \quad (90)$$

**Si vede quindi che, a meno del coefficiente costante  $(2/3)^{-1/2}$ , il vettore  $(i_\alpha, i_\beta)$  coincide con il vettore spaziale laddove si identifichi l'asse  $\alpha$  con l'asse reale e l'asse  $\beta$  con quello immaginario.**

Pertanto il vettore  $(i_\alpha, i_\beta)$ , nel piano  $\alpha, \beta$  ha lo stesso significato fisico del vettore spaziale nel piano complesso, ovvero rappresenta direzione ed ampiezza del campo (fondamentale) di fmm prodotto dalle tre correnti di fase terna  $i_a, i_b, i_c$ .



**Fig. 17**

In particolare:

Una terna diretta simmetrica ed equilibrata di correnti di ampiezza  $I_0$  e pulsazione  $\omega$  viene mappata dalla trasformazione di Clarke in un vettore  $i_{\alpha\beta}$  con ampiezza costante pari a

$$\sqrt{\frac{3}{2}} I_0$$

vettore che ruota con velocità elettrica  $\omega$  nel piano  $\alpha\beta$  con verso pari dato dal senso ciclico delle fasi.

Infatti, dalla (82)-(83) si ha che la terna

$$i_a(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi), \quad i_b(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right), \quad i_c(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right)$$

corrisponde al vettore spaziale:

$$\bar{i}(t) = \frac{3}{2} I_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{3}{2} I_0 \left[ \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi) \right] \quad (91)$$

e quindi, in base a (90), viene trasformata in un vettore nel piano  $\alpha\beta$  avente componenti:

$$\begin{aligned} i_\alpha(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{\bar{i}(t)\} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} I_0 \cos(\omega t + \phi) = \sqrt{\frac{3}{2}} I_0 \cos(\omega t + \phi) \\ i_\beta(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Im}\{\bar{i}(t)\} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} I_0 \sin(\omega t + \phi) = \sqrt{\frac{3}{2}} I_0 \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (92)$$

cioè il vettore  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$  ha modulo costante, pari a

$$\sqrt{\frac{3}{2}} I_0$$

e ruota con velocità  $\omega$  con verso uguale al senso ciclico delle fasi.

E' chiaro invece che la componente omopolare (cioè il terzo elemento del vettore  $\mathbf{i}_{\alpha\beta 0}$ ) per una terna simmetrica è nulla.

$$\begin{cases} i_a(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \\ i_b(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \phi\right) \\ i_c(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \phi\right) \end{cases}$$

Componente omopolare

$$i_0 = 0$$

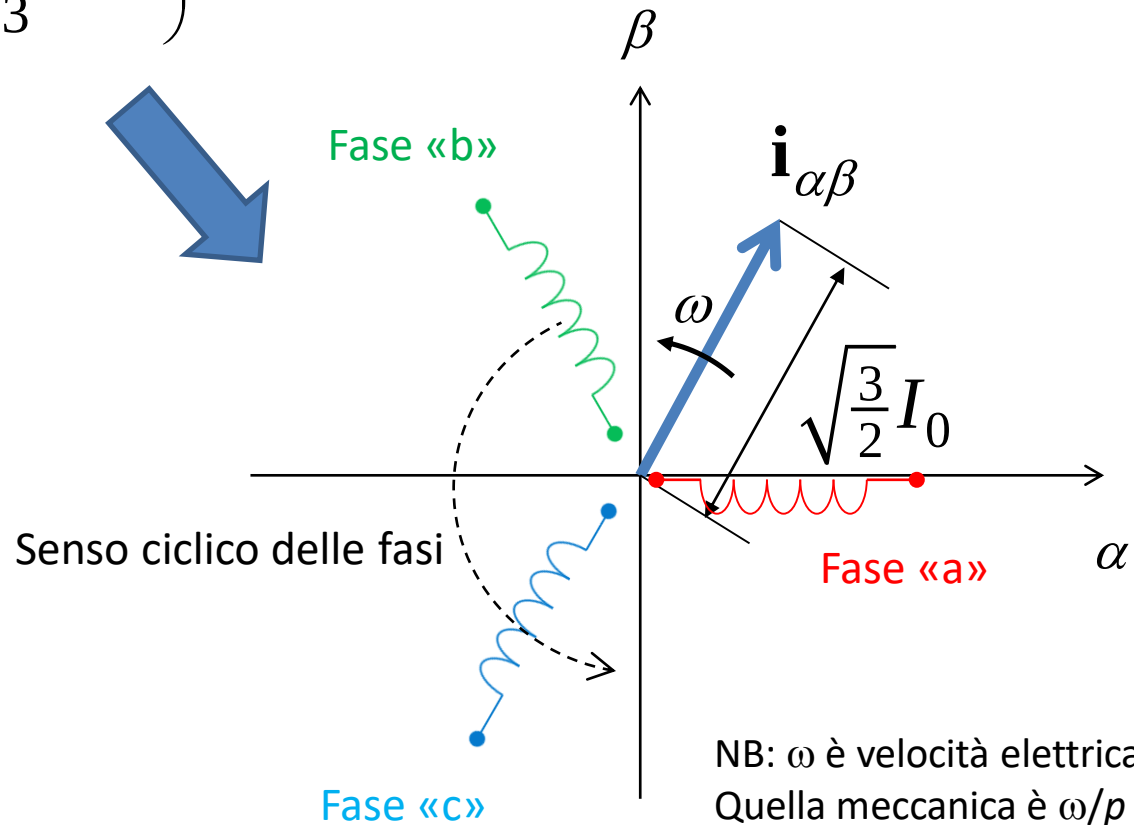


Fig. 18

La trasformazione di Clarke si applica anche alle altre grandezze di fase, cioè tensioni e flussi concatenati, anche se i relativi vettori trasformati non hanno interpretazione fisica significativa. Formalmente:

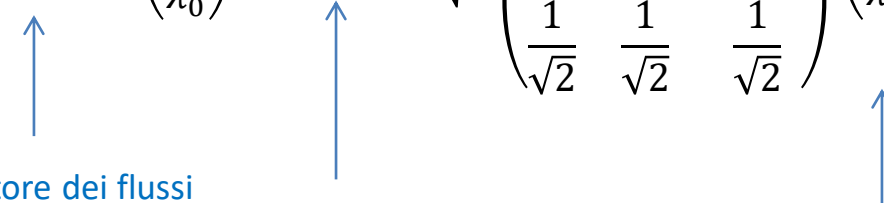
$$\mathbf{v}_{\alpha\beta 0} \triangleq \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_0 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{C} \mathbf{v}_{abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} v_a - \frac{1}{2}v_b - \frac{1}{2}v_c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}v_b - \frac{\sqrt{3}}{2}v_c \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v_a + \frac{1}{\sqrt{2}}v_b + \frac{1}{\sqrt{2}}v_c \end{pmatrix} \quad (93)$$



Vettore delle tensioni trasformate

Vettore delle tensioni di fase

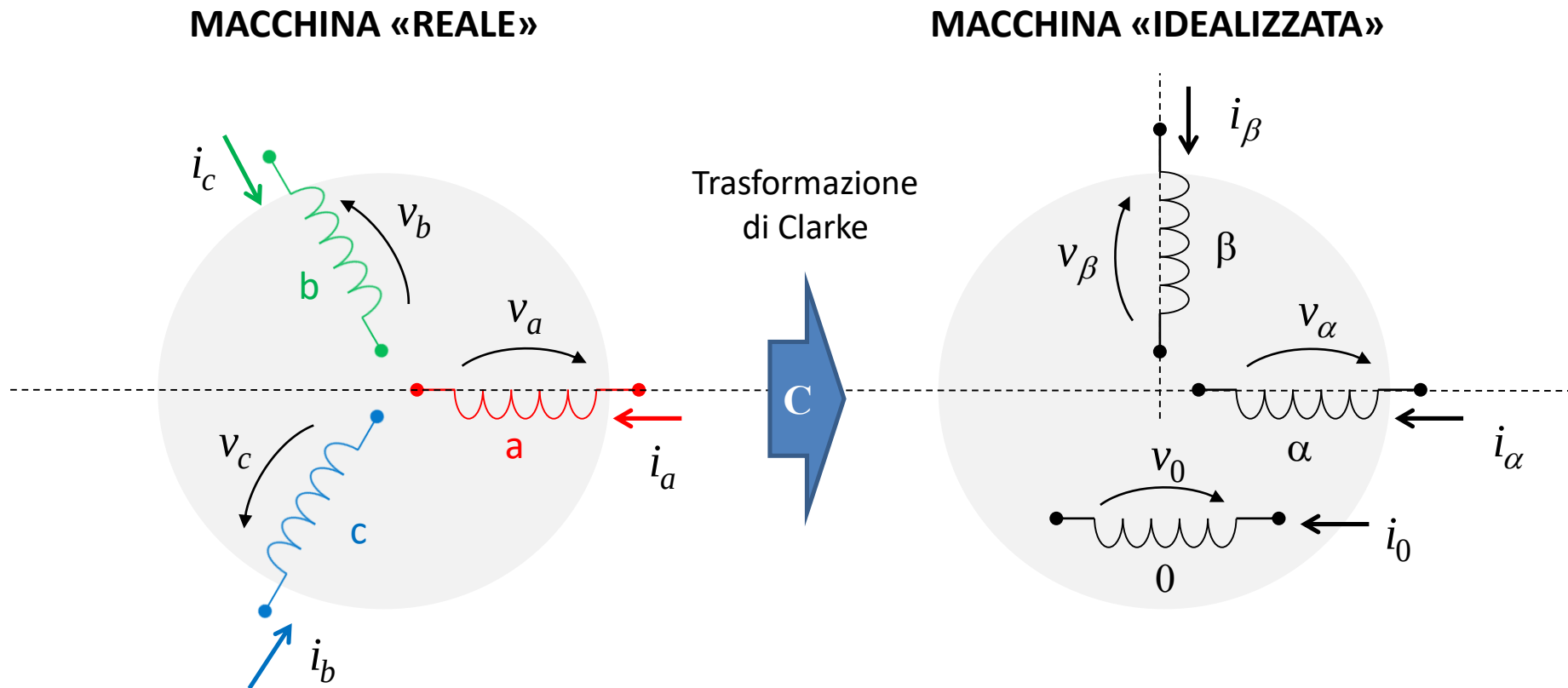
$$\boldsymbol{\lambda}_{\alpha\beta 0} \triangleq \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \lambda_\beta \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}_{abc} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \lambda_a - \frac{1}{2}\lambda_b - \frac{1}{2}\lambda_c \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_b - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_c \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_a + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_c \end{pmatrix} \quad (94)$$



Vettore dei flussi concatenati trasformati

Vettore dei flussi concatenati di fase

In base a quanto detto, la trasformazione di Clarke porta dalla macchina reale, caratterizzata dalle tre fasi «a», «b» e «c» percorse dalle tre correnti generiche  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  e soggette alle tensioni  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$ , ad una «macchina ideale» o «macchina idealizzata» in cui vi sono due avvolgimenti ortogonali, indicati con « $\alpha$ » e « $\beta$ », percorsi dalle correnti trasformate  $i_\alpha$ ,  $i_\beta$  e soggetti alle tensioni trasformate  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ , più un terzo avvolgimento percorso dalla corrente omopolare  $i_0$  e soggetto alla tensione omopolare  $v_0$ .



**Fig. 19**

NB: si è usata la convenzione del motore



Si vuole valutare la potenza elettrica complessiva assorbita dalla macchina reale e da quella ideale. In entrambi

### **MACCHINA «REALE»**

$$P_{\text{reale}} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \begin{pmatrix} v_a & v_b & v_c \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \mathbf{v}_{abc}^t \mathbf{i}_{abc} \quad (95)$$

### **MACCHINA «IDEALIZZATA»**

$$\begin{aligned} P_{\text{ideal}} &= v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0 = \begin{pmatrix} v_\alpha & v_\beta & v_0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^t \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} = \\ &= (\mathbf{C} \mathbf{v}_{abc})^t \mathbf{C} \mathbf{i}_{abc} = \mathbf{v}_{abc}^t \mathbf{C}^t \mathbf{C} \mathbf{i}_{abc} \end{aligned} \quad (96)$$

Usando la (86), si può immediatamente verificare che vale l'identità:

$$\mathbf{C}^t \mathbf{C} = \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

ossia, in termini algebrici, si dice che la matrice  $\mathbf{C}$  è ortonormale, ossia la sua trasposta coincide con la sua inversa.

In base alla (97) la (96) diventa:

$$P_{\text{ideal}} = \mathbf{v}_{abc} \mathbf{C}^t \mathbf{C} \mathbf{i}_{abc} = \mathbf{v}_{abc} \mathbf{i}_{abc} = P_{\text{real}} \quad (98)$$

ossia la potenza assorbita dalla macchina reale è uguale a quella assorbita dalla macchina idealizzata.

**In base a tale osservazione, si dice che la trasformazione di Clarke definita dalla (86) è «invariante rispetto alla potenza».**

---

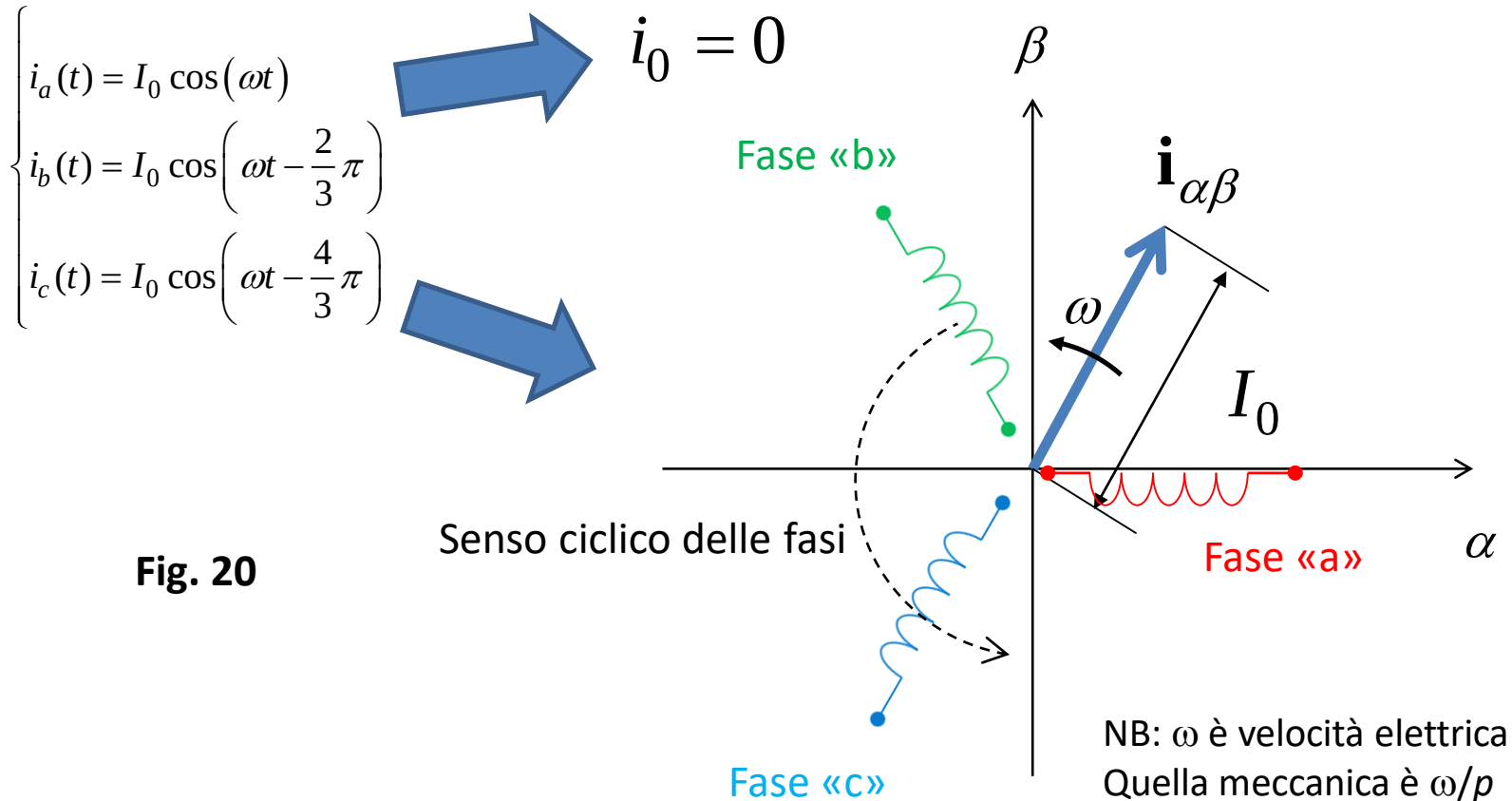
Esiste una definizione alternativa della trasformazione di Clarke identificata dalla matrice:

$$\mathbf{C}' = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (99)$$

Questa forma della trasformazione è definita **«invariante rispetto all'ampiezza»**. Infatti, è immediato provare che essa trasforma una terna di correnti di ampiezza  $I_0$  e pulsazione  $\omega$  in un vettore rotante nel piano  $\alpha\beta$  caratterizzato da velocità  $\omega$  e ampiezza  $I_0$ :

$$\begin{pmatrix} I_0 \cos(\omega t) \\ I_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_0 \cos(\omega t) \\ I_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ I_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \quad (100)$$

Ossia se usiamo la trasformazione di Clarke basata sulla matrice  $\mathbf{C}'$  abbiamo:



**Fig. 20**

Per quanto riguarda la potenza, invece, la trasformazione basata su  $\mathbf{C}'$  non è invariante.

### Potenza elettrica entrante in macchina reale

$$P_{\text{reale}} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \begin{pmatrix} v_a & v_b & v_c \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \mathbf{v}_{abc}^t \mathbf{i}_{abc} \quad (95)$$

### Potenza elettrica entrante in macchina idealizzata

$$\begin{aligned} P_{\text{ideal}} &= v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0 = \begin{pmatrix} v_\alpha & v_\beta & v_0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^t \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} = \\ &= (\mathbf{C}' \mathbf{v}_{abc})^t \mathbf{C}' \mathbf{i}_{abc} = \mathbf{v}_{abc}^t \mathbf{C}'^t \mathbf{C}' \mathbf{i}_{abc} \end{aligned} \quad (96)$$

In base alla definizione (99) si dimostra subito che:

$$\mathbf{C}'^t \mathbf{C}' = \left[ \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]^t \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Sostituendo la (97) nella (96):

$$P_{al} = \mathbf{v}_{abc}^t \left[ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \mathbf{i}_{abc} = \frac{2}{3} P_{real} - \frac{1}{9} (v_a + v_b + v_c)(i_a + i_b + i_c) = \frac{2}{3} P_{real} - v_0 i_0 \quad (98)$$

essendo  $v_0$  e  $i_0$  le componenti omopolari.

La (98) mostra che, se la componente omopolare della tensione e/o quella della corrente sono nulle, la potenza della macchina reale è pari a quella della macchina idealizzata moltiplicata per 3/2.

**Nel seguito, si userà sempre la trasformazione di Clarke invariante rispetto alla potenza definita dalla (86).**

## Trasformazione di Park (da $\alpha\beta 0$ a $dq 0$ )

Si consideri una certa grandezza elettrica (corrente, flusso concatenato o tensione). I suoi valori di fase sono  $x_a$ ,  $x_b$ ,  $x_c$  raggruppati nel vettore:

$$\mathbf{x}_{abc} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \quad (99)$$

La trasformata di Clarke (invariante alla potenza) trasforma tale vettore nel vettore:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta 0} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \quad (100)$$

La trasformazione di Park è una trasformazione lineare che, applicata alle variabili  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$ ,  $x_0$ , effettua le seguenti azioni:

- Lascia invariata la componente omopolare  $x_0$
- Esprime il vettore  $(x_\alpha, x_\beta)$  in un sistema di riferimento ortogonale  $dq$  ruotato di un angolo  $\theta$  rispetto al sistema  $\alpha\beta$ .

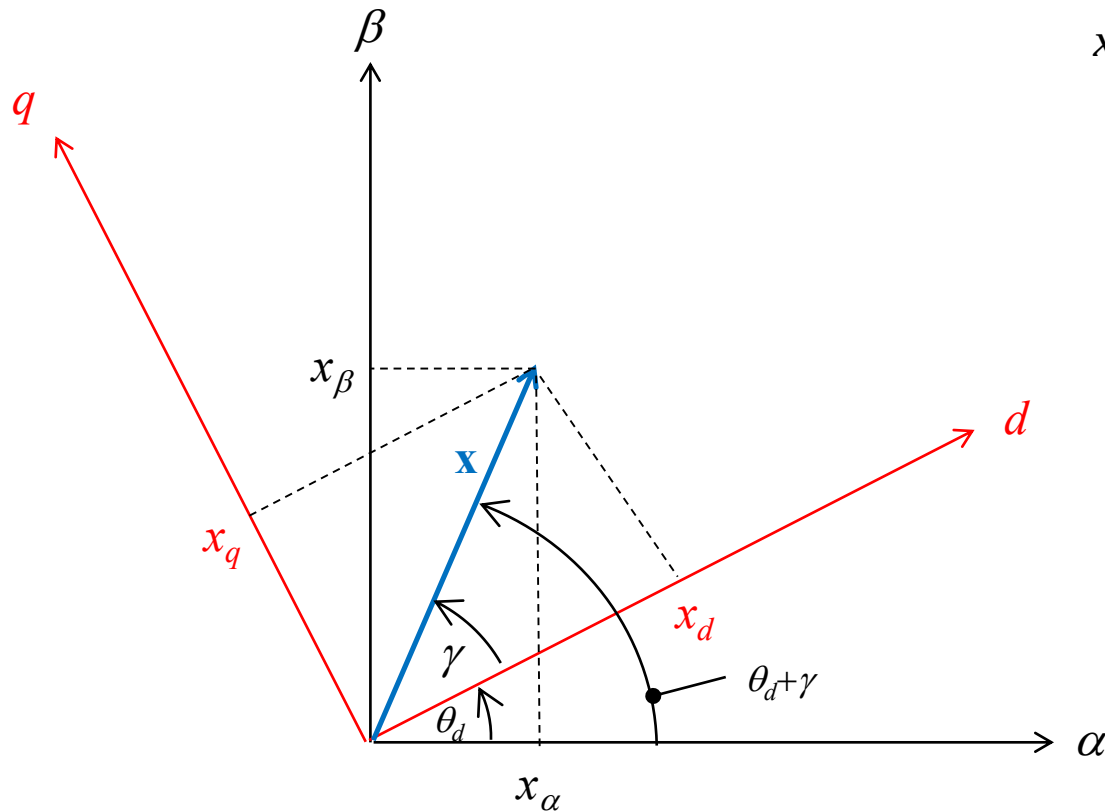
Il concetto è illustrato in Fig. 19.

$$x_\alpha = |\mathbf{x}| \cos(\theta_d + \gamma) = |\mathbf{x}| \cos(\theta_d) \cos(\gamma) - |\mathbf{x}| \sin(\theta_d) \sin(\gamma) \quad (100)$$

$$x_\beta = |\mathbf{x}| \sin(\theta_d + \gamma) = |\mathbf{x}| \sin(\theta_d) \cos(\gamma) + |\mathbf{x}| \cos(\theta_d) \sin(\gamma)$$

$$x_d = |\mathbf{x}| \cos(\gamma) \quad (101)$$

$$x_q = |\mathbf{x}| \sin(\gamma)$$



Da banali  
considerazioni  
geometriche e  
trigonometriche si  
trovano le (100)-(101).

**Fig. 21**

Sostituendo le (101) nelle (100) si ha:

$$x_\alpha = x_d \cos(\theta_d) - x_q \sin(\theta_d) \quad (102)$$

$$x_\beta = x_d \sin(\theta_d) ~~\cos(\theta_d)~~ + x_q \cos(\theta_d)$$

Le coordinate nei due sistemi di riferimento sono quindi legati dalla relazione lineare:

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & -\sin(\theta_d) \\ \sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} \quad (103)$$

$$\begin{pmatrix} x_d \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & -\sin(\theta_d) \\ \sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & \sin(\theta_d) \\ -\sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{pmatrix} \quad (104)$$

Dalla (104) e dal fatto che la componente omopolare si deve conservare, si ottiene la matrice che realizza la trasformazione di Park:

$$\mathbf{P}(\theta_d) \triangleq \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & \sin(\theta_d) & 0 \\ -\sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (105)$$



E' facile mostrare che la matrice di Park è ortonormale, cioè la sua inversa coincide con la sua trasposta, proprietà che già si è usata nella (104).

## Trasformazione $dq0$ e vettore spaziale

Immaginiamo di avere un vettore spaziale associato alle tre generiche grandezze trifase  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$ ,  $x_c(t)$ . Preso il vettore spaziale associato

$$\bar{x}(t) = x_a(t)e^{j0} + x_b(t)e^{j\frac{2}{3}\pi} + x_c(t)e^{j\frac{4}{3}\pi}$$

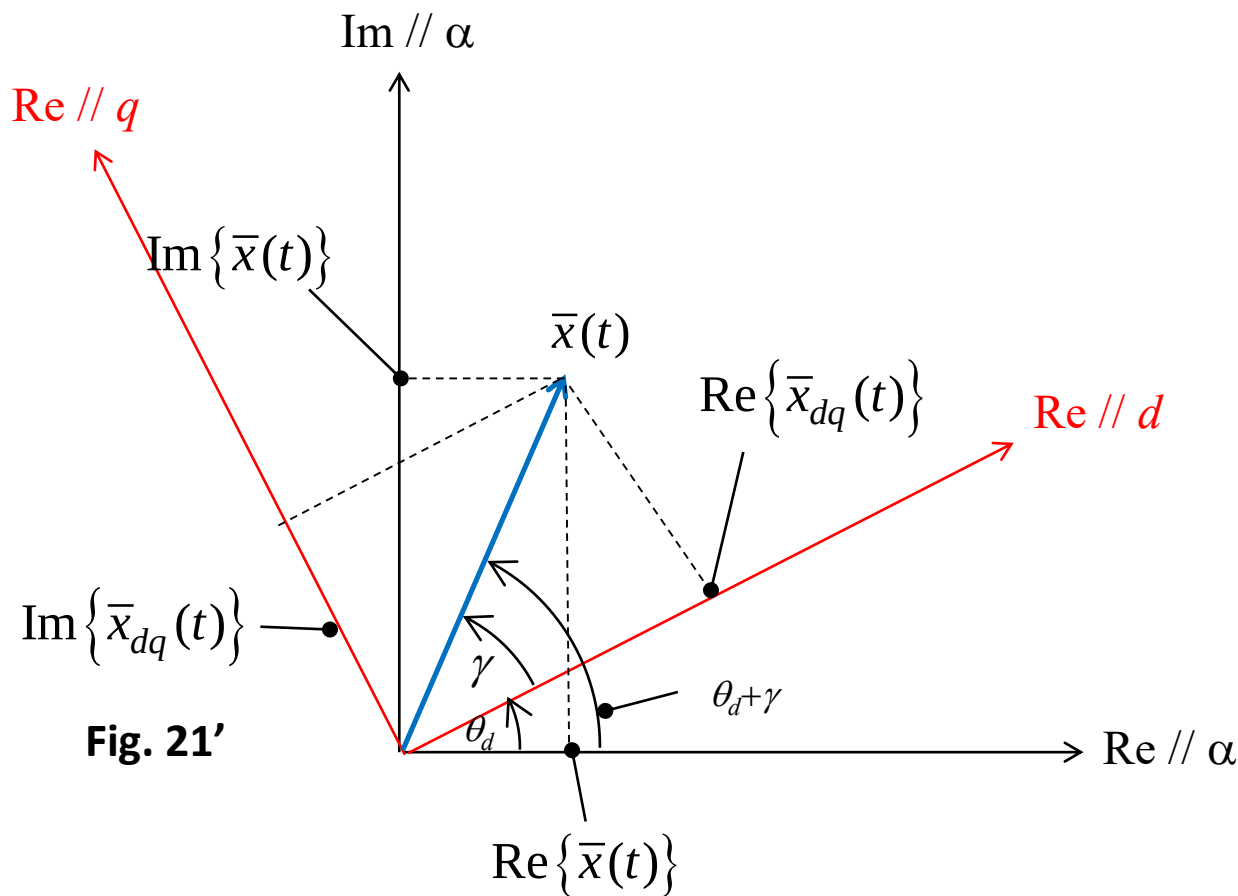
il vettore nel piano  $\alpha, \beta$  derivante dalla trasformazione  $abc \rightarrow \alpha\beta 0$

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}(t) = \begin{pmatrix} x_{\alpha}(t) \\ x_{\beta}(t) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} x_a(t) - \frac{1}{2}x_b(t) - \frac{1}{2}x_c(t) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_b(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}x_c(t) \end{pmatrix}$$

si è mostrato [eq. (90)] che sussiste la relazione:

$$x_{\alpha}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{\bar{x}(t)\}, \quad x_{\beta}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Im}\{\bar{x}(t)\} \quad (105a)$$

A questo punto, ipotizziamo di voler esprimere il vettore spaziale  $\bar{x}(t)$  in un sistema di riferimento complesso con asse reale coincidente con l'asse d e l'asse immaginario coincidente con l'asse q (Fig. 21') e indichiamo con  $\bar{x}_{dq}(t)$  il vettore spaziale in tale sistema di riferimento.



**Fig. 21'**

E' evidente dalla figura che il vettore spaziale nel nuovo sistema di riferimento è quello nel sistema originario a meno della fase, che passa da  $\theta_d + \gamma$  a  $\gamma$ . In altri termini il vettore nel nuovo sistema di riferimento è quello nel vecchio ruotato di  $-\theta_d$ .

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_{dq}(t) &= \bar{x}(t)e^{-j\theta_d} = [\text{Re}\{\bar{x}(t)\} + j \text{Im}\{\bar{x}(t)\}] [\cos(-\theta_d) + j \sin(-\theta_d)] = \\
 &= [\text{Re}\{\bar{x}(t)\} + j \text{Im}\{\bar{x}(t)\}] [\cos(\theta_d) - j \sin(\theta_d)] = \\
 &= \text{Re}\{\bar{x}(t)\} \cos(\theta_d) + \text{Im}\{\bar{x}(t)\} \sin(\theta_d) + j [\text{Im}\{\bar{x}(t)\} \cos(\theta_d) - \text{Re}\{\bar{x}(t)\} \sin(\theta_d)] \quad (105b)
 \end{aligned}$$

Usando le (105a) in (105b):

$$\begin{aligned}\bar{x}_{dq}(t) &= \left[ \operatorname{Re}\{\bar{x}(t)\} \cos(\theta_d) + \operatorname{Im}\{\bar{x}(t)\} \sin(\theta_d) \right] + j \left[ \operatorname{Im}\{\bar{x}(t)\} \cos(\theta_d) - \operatorname{Re}\{\bar{x}(t)\} \sin(\theta_d) \right] = \\ &= \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} x_\alpha(t) \cos(\theta_d) + \sqrt{\frac{3}{2}} i_\beta(t) \sin(\theta_d) \right] + j \left[ \sqrt{\frac{3}{2}} i_\beta(t) \cos(\theta_d) - \sqrt{\frac{3}{2}} x_\alpha(t) \sin(\theta_d) \right] = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ x_\alpha(t) \cos(\theta_d) + i_\beta(t) \sin(\theta_d) \right] + j \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ i_\beta(t) \cos(\theta_d) - x_\alpha(t) \sin(\theta_d) \right]\end{aligned}$$

Ossia:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\bar{x}_{dq}(t)\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ x_\alpha(t) \cos(\theta_d) + i_\beta(t) \sin(\theta_d) \right] \\ \operatorname{Im}\{\bar{x}_{dq}(t)\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left[ i_\beta(t) \cos(\theta_d) - x_\alpha(t) \sin(\theta_d) \right]\end{aligned} \quad (105c)$$

Confrontando la (105c) con la (104) si ricava:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\bar{x}_{dq}(t)\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} x_d \\ \operatorname{Im}\{\bar{x}_{dq}(t)\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} x_q\end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned}x_d(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{\bar{x}_{dq}(t)\} \\ x_q(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Im}\{\bar{x}_{dq}(t)\}\end{aligned} \quad (106c)$$

**Si vede quindi che, a meno del coefficiente costante  $(2/3)^{-1/2}$ , il vettore  $(\mathbf{i}_d, \mathbf{i}_q)$  coincide con il vettore spaziale laddove si identifichi l'asse  $d$  con l'asse reale e l'asse  $q$  con quello immaginario.**

## Trasformazione complessiva (da $abc$ a $dq0$ )

La trasformazione complessiva, dalle variabili di fase  $a, b, c$  a quelle nel sistema  $dq0$  è quindi ottenuta applicando in cascata la trasformata di Clarke e di Park come segue:

$$\mathbf{x}_{dq0} \triangleq \begin{pmatrix} x_d \\ x_q \\ x_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}(\theta_d) \begin{pmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\mathbf{P}(\theta_d)\mathbf{C}}_{\mathbf{T}(\theta_d)} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix} \quad (106)$$

$\mathbf{T}(\theta_d)$  è la matrice di trasformazione complessiva da  $abc$  a  $dq0$  :

$$\mathbf{T}(\theta_d) \triangleq \mathbf{P}(\theta_d)\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & \sin(\theta_d) & 0 \\ -\sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (107)$$

Sviluppando il prodotto la (107) può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{T}(\theta_d) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & \cos(\theta_d - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\theta_d - \frac{4}{3}\pi) \\ -\sin(\theta_d) & -\sin(\theta_d - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_d - \frac{4}{3}\pi) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (108)$$

Tale matrice, essendo il prodotto di matrici ortonormali, è anch'essa ortonormale, cioè:

$$\mathbf{T}(\theta_d)^{-1} = \mathbf{T}(\theta_d)^t \quad (109)$$

Infatti:

$$\mathbf{T}(\theta_d)^t = [\mathbf{P}(\theta_d)\mathbf{C}]^t = \mathbf{C}^t\mathbf{P}(\theta_d)^t = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{P}(\theta_d)^{-1} = [\mathbf{P}(\theta_d)\mathbf{C}]^{-1} = \mathbf{T}(\theta_d)^{-1} \quad (109)$$

**Quindi anche la trasformazione complessiva è invariante rispetto alla potenza.**

La derivata rispetto a  $\theta$  è:

$$\frac{d}{d\theta_d} \mathbf{T}(\theta_d) = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta_d) & -\sin(\theta_d - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\theta_d - \frac{4}{3}\pi) \\ -\cos(\theta_d) & -\cos(\theta_d - \frac{2}{3}\pi) & -\cos(\theta_d - \frac{4}{3}\pi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

Da (108) e (110) è facile dimostrare che la trasformazione gode dell'ulteriore proprietà:

$$\mathbf{T}(\theta_d) \left[ \frac{d}{d\theta_d} \mathbf{T}(\theta_d) \right]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \triangleq \mathbf{J} \quad (111)$$

Tale proprietà sarà sfruttata nel seguito per l'applicazione della trasformazione al modello delle macchine sincrone ed asincrone.

Come caso particolare, supponiamo di avere una terna di grandezze di fase sinusoidali di ampiezza  $X_0$ , pulsazione  $\omega$  e fase iniziale  $\varphi$ :

$$\begin{cases} x_a(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_b(t) = X_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \\ x_c(t) = X_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \varphi\right) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(possono essere correnti, tensioni o flussi concatenati) e} \\ \text{supponiamo di voler trasformare tale terna in un sistema di} \\ \text{riferimento } dq0 \text{ con gli assi } dq \text{ rotanti con velocità } \omega \text{ pari} \\ \text{alla pulsazione delle grandezze trifase.} \end{array} \quad (111)$$

Ricordiamo che la terna di grandezze (111) è rappresentata dal fasore complesso:

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_0 e^{j\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_0 \cos(\varphi) + j \frac{1}{\sqrt{2}} X_0 \sin(\varphi) \quad (112)$$

In base a quanto finora detto, è intuitivamente comprensibile che la trasformazione porta ad un vettore costante (fisso) nel sistema  $dq$ .

Dimostriamolo formalmente per completezza:

In base alle (92) le variabili (111) trasformate secondo Clarke sono:

$$\begin{pmatrix} x_\alpha(t) \\ x_\beta(t) \\ x_0(t) \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} X_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (112)$$

Le variabili trasformate nel sistema dq0 sono quindi:

$\theta_d(t) = \omega t$  In quanto gli assi dq ruotano con velocità angolare elettrica  $\omega$

$$\begin{pmatrix} x_d(t) \\ x_q(t) \\ x_0(t) \end{pmatrix} = \mathbf{P}(\omega t) \begin{pmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} X_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} X_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (113)$$

Si può vedere che la terna (111) viene trasformata in un vettore costante nel piano dq avente coordinate:

$$X_{d0} = \sqrt{\frac{3}{2}} X_0 \cos(\varphi) \quad X_{q0} = \sqrt{\frac{3}{2}} X_0 \sin(\varphi) \quad (114)$$

Tale vettore costante coincide, a meno di una costante, con il fasore complesso (112) associato a (111), cioè si può scrivere:

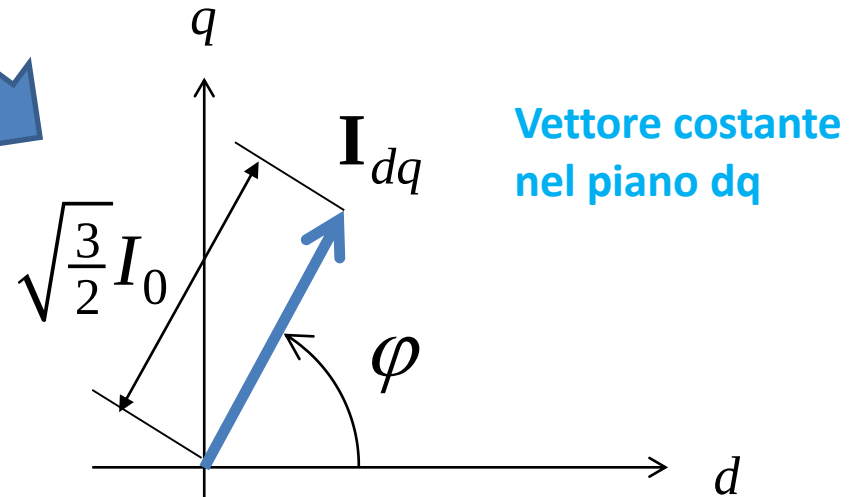
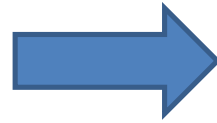
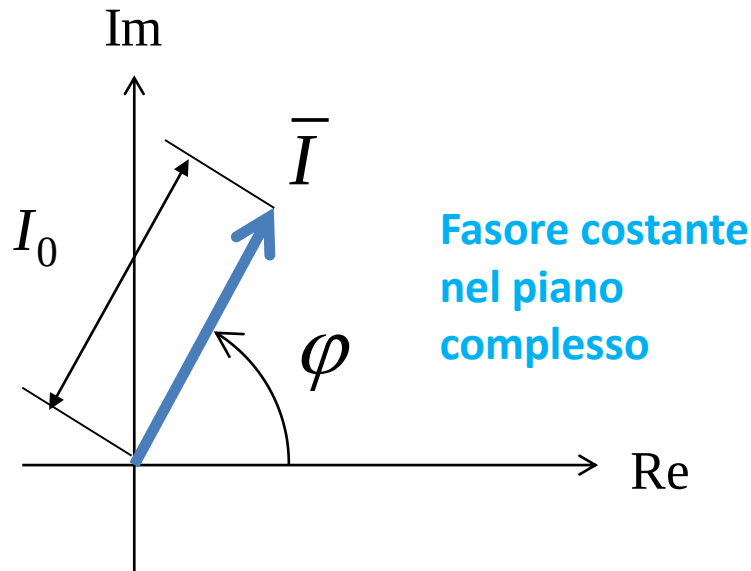
$$\begin{aligned} \bar{X} &= X_0 e^{j\varphi} = \\ &= X_0 \cos \varphi + j X_0 \sin \varphi \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} X_{d0} + j \sqrt{\frac{2}{3}} X_{q0} \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} X_{d0} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{Re} \{ \bar{X} \} \\ X_{q0} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{Im} \{ \bar{X} \} \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{cases} x_a(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_b(t) = X_0 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \varphi\right) \\ x_c(t) = X_0 \cos\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi + \varphi\right) \end{cases}$$

Componente omopolare

$$i_0 = 0$$



Coincidono a meno di una costante

Fig. 22



A meno di una costante, si può dire che la trasformazione dq0, rotante con velocità  $\omega$ , mappa una terna simmetrica di grandezze di fase aventi pulsazione  $\omega$  nel fasore (costante) che le rappresenta.

Si comprende quindi l'utilità della trasformazione dq0: nel funzionamento a regime, dove le grandezze di fase della macchina sono sinusoidali nel tempo, la trasformazione dq0 mappa tali grandezze in vettori costanti nel tempo corrispondenti ai loro fasori.

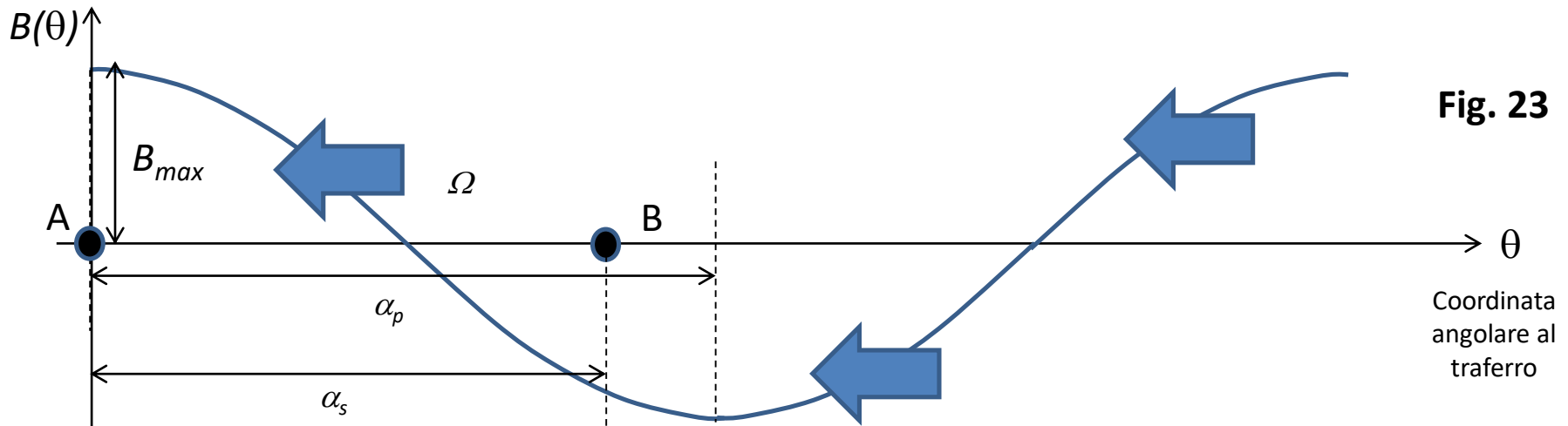
In tal modo, la trasformazione dq0 consente di studiare il funzionamento a regime della macchina elettrica attraverso il calcolo fasoriale, prescindendo dalla dipendenza dal tempo.

Forza elettromotrice indotta in una  
fase da un campo rotante sinusoidale

## Forza elettromotrice indotta in una fase da un campo magnetico rotante

Ipotizziamo di avere un campo magnetico con  $p$  coppia polari rotante con distribuzione sinusoidale che si sposta ad una velocità meccanica  $\Omega$ , ossia ad una «velocità elettrica» definita come.

$$\Omega_{el} = \Omega p$$



L'equazione del campo (=onda sinusoidale) in funzione della posizione e del tempo sarà allora:

$$B(\theta, t) = B_{\max} \cos(p\Omega t - p\theta)$$

Infatti, un osservatore che ruotasse alla velocità angolare  $\Omega$  e avesse quindi posizione

$$\theta(t) = \Omega t$$

ruoterebbe solidalmente con il campo e vedrebbe un campo costante nella sua posizione.

$$B(\Omega t, t) = B_{\max} \cos(p\Omega t - p\Omega t) = B_{\max}$$

Inoltre, in un fissato istante di tempo, ad esempio  $t=0$ , il campo deve avere una forma sinusoidale con  $p$  coppie polari, cioè:

$$B(\theta, t) = B_{\max} \cos(p\theta)$$

Consideriamo ora una bobina con lati attivi A e B (Fig. 23), composta da  $N$  spire, con apertura angolare  $\alpha_s$ , collocati nelle posizioni:

$$\theta_A = 0 \qquad \theta_B = \theta_A + \alpha_s \qquad \left( \theta_B - \theta_A = \alpha_s \right)$$

$$\alpha_s = r \alpha_p = r \frac{\pi}{2p}$$

con  $r$  raccorciamento di passo della bobina e  $\alpha_p = \frac{\pi}{2p}$  passo polare in radianti meccanici.

Il flusso concatenato con la bobina sarà:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= NL \int_{\theta_A}^{\theta_B} B(\theta, t) R d\theta = NL \int_{\theta_A}^{\theta_B} B_{\max} \cos(p\Omega t - p\theta) R d\theta = \\ &= N \frac{2LB_{\max}R}{p} \sin(p\theta_B - p\theta_A) \cos\left(p\Omega t - p\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\right) \end{aligned}$$

dove  $R$  è il raggio al traferro e  $L$  la lunghezza attiva della macchina.

Per la legge di Faraday, la forza elettromotrice indotta nella spira sarà quindi:

Notiamo, nell'equazione precedente, che il flusso per polo  $\Phi$  associato all'onda di induzione è:

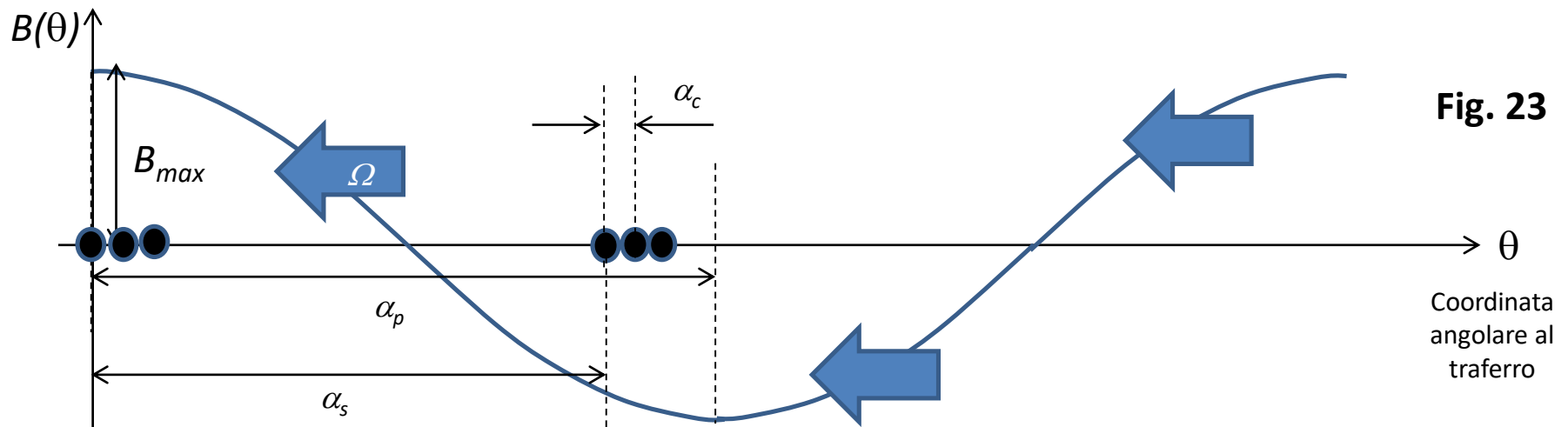
$$\begin{aligned}\Phi &= L \int_{-\alpha_p/2}^{\alpha_p/2} B(\theta) R d\theta = L \int_{-\pi/(2p)}^{\pi/(2p)} B_{max} \cos(p\theta) R d\theta \\ &= R L B_{max} 2 \frac{1}{p} \sin\left(p \frac{\pi}{2p}\right) = \frac{2 R L B_{max}}{p}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= N \frac{2 L B_{max} R}{p} \sin(p\theta_B - p\theta_A) \cos\left(p\Omega t - p \frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right) \\ &= N \frac{2 L B_{max} R}{p} \sin\left(r \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(p\Omega t - p \frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right) = N \Phi k_{r,1} \cos\left(p\Omega t - p \frac{\theta_A - \theta_B}{2}\right)\end{aligned}$$

Coefficiente di raccorciamento

Supponiamo di avere (come in una fase)  $q$  bobine sfasate di un passo cava  $\alpha_c$ :



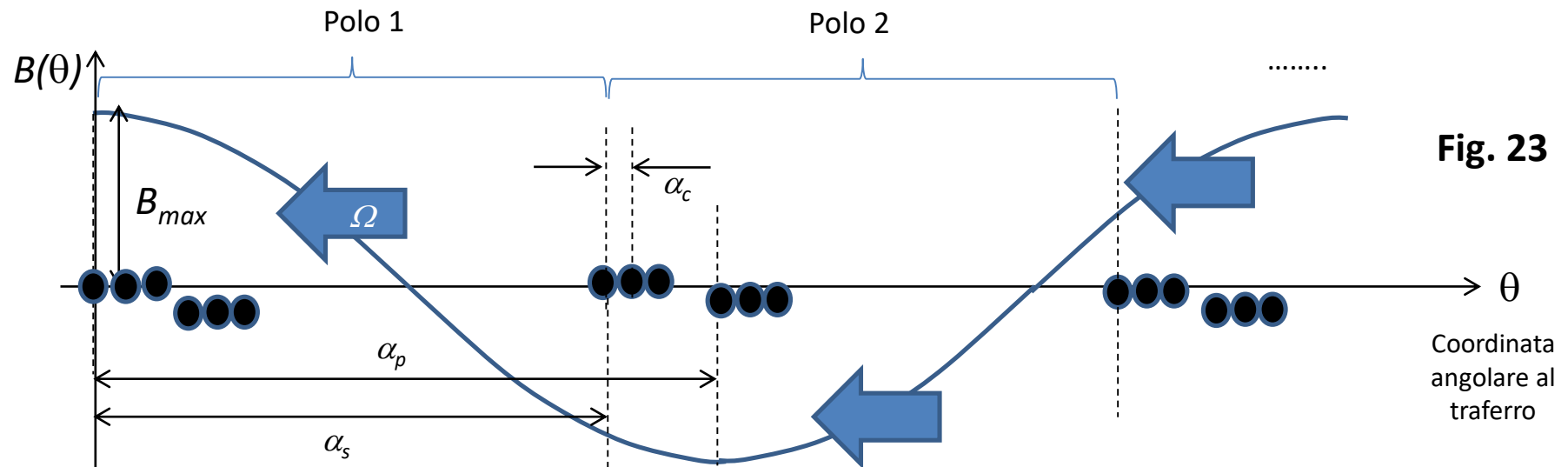
Si può dimostrare come, in tal caso, sommando i flussi concatenati su tutte le q bobine si ottiene:

$$(\xi = cost)$$

$$\lambda(t) = qN\Phi k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\Omega t - \xi)$$

└── Coefficiente di distribuzione

e supponendo che le q bobine siano presenti in ogni polo (come per una fase), con un totale di  $N_s$  spire in serie per fase e b rami in parallelo per fase:



**Fig. 23**

In tal caso devo sommare su tutti i poli ( $2p$ ) e dividere per il numero di rami in parallelo ( $b$ ) in quanto interessa il flusso concatenato con le spire di un singolo ramo in parallelo:

$$\lambda(t) = \frac{2p}{b} qN\Phi k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\Omega t - \xi)$$

Sappiamo d'altra parte che:

$$N = \frac{bN_s}{2pq}$$

da cui possiamo scrivere:

$$\lambda(t) = \frac{2p}{b} q N \Phi k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\Omega t - \xi) = N_s \Phi k_{r,1} k_{d,1} \cos(p\Omega t - \xi)$$

Flusso concatenato con una fase prodotto da un'onda di induzione al traferro caratterizzata un flusso per polo  $\Phi$

$$\lambda(t) = \Lambda_{max} \cos(p\Omega t - \xi)$$

$$\Lambda_{max} = N_s \Phi k_{r,1} k_{d,1}$$

NB: stessa formula vista per il flusso massimo concatenato con una fase di un trasformatore, ma in questo caso il flusso  $\Phi$  non è il flusso di colonna ma il flusso per polo (al traferro) e compaiono i coefficienti di raccorciamento e di distribuzione

$$e(t) = -\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\frac{d}{dt}\Lambda_{max} \cos(p\Omega t - \alpha) = \Lambda_{max} p\Omega \sin(p\Omega t - \alpha) = E_{max} \sin(p\Omega t - \alpha) = E_{max} \sin(\Omega_{el}t - \alpha)$$

La frequenza  $f$  della forza elettromotrice indotta sarà quindi tale che

$$\Omega_{el} = \Omega p = 2\pi f$$

La frequenza  $f$  della forza elettromotrice indotta sarà quindi tale che

$$f = \frac{\Omega_{el}}{2\pi} = \frac{\Omega p}{2\pi}$$

Inoltre:

$$E_{max} = \Lambda_{max} p \Omega = \Lambda_{max} \Omega_{el} = 2\pi f \Lambda_{max} = 2\pi f N_s \Phi k_{r,1} k_{d,1}$$

Ossia per il valore efficace:

$$E_{eff} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi f N_s \Phi k_{r,1} k_{d,1} \approx 4.44 f N_s \Phi k_{r,1} k_{d,1}$$

**Si vede pertanto che un campo sinusoidale al traferro, con flusso per polo  $\Phi$ , che ruota con velocità meccanica  $\Omega$  ed elettrica  $\Omega_{el} = \Omega p$  produce nella fase una forza elettromotrice avente pulsazione angolare pari alla sua velocità elettrica e una ampiezza pari a  $4.44 f N_s \Phi k_{r,1} k_{d,1}$  (stessa formula che nel trasformatore con aggiunta dei coefficienti di raccorciamento e distribuzione).**

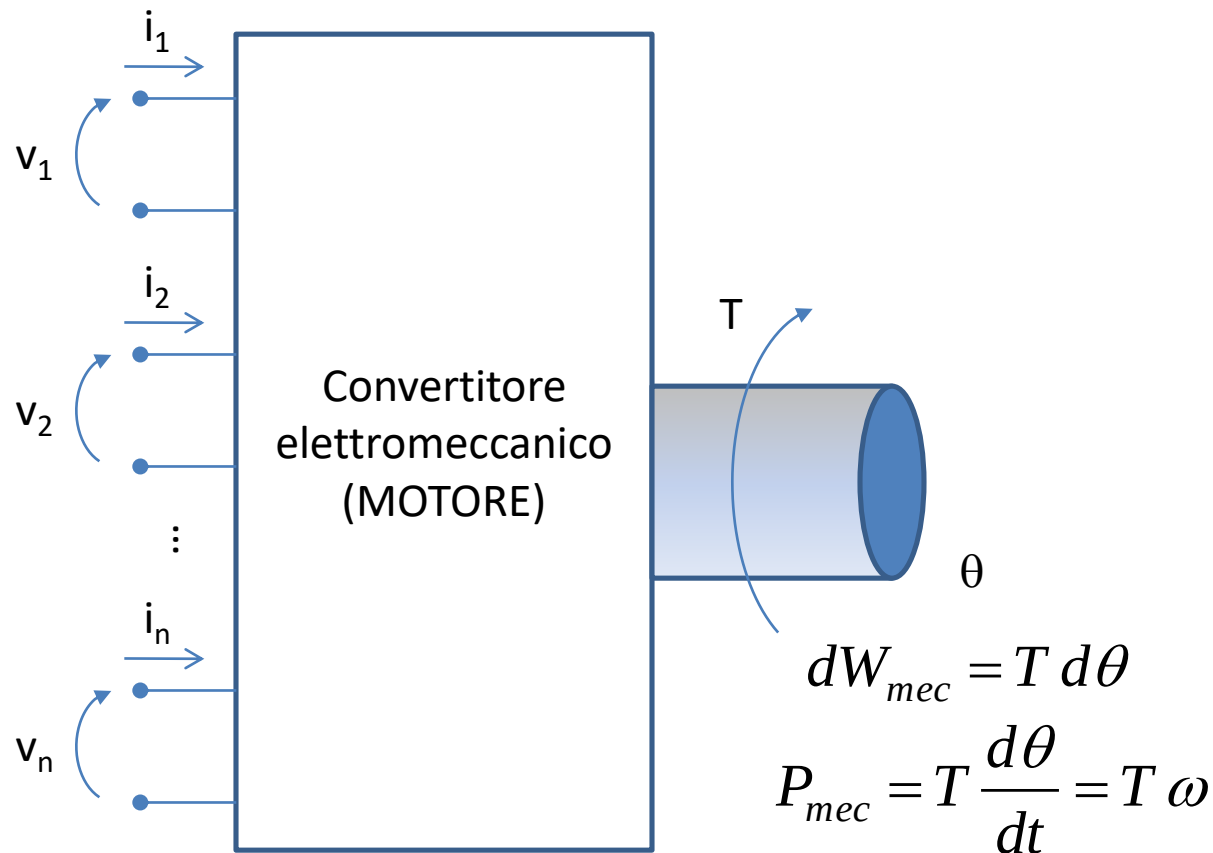


Espressione generale della coppia in  
una macchina rotante

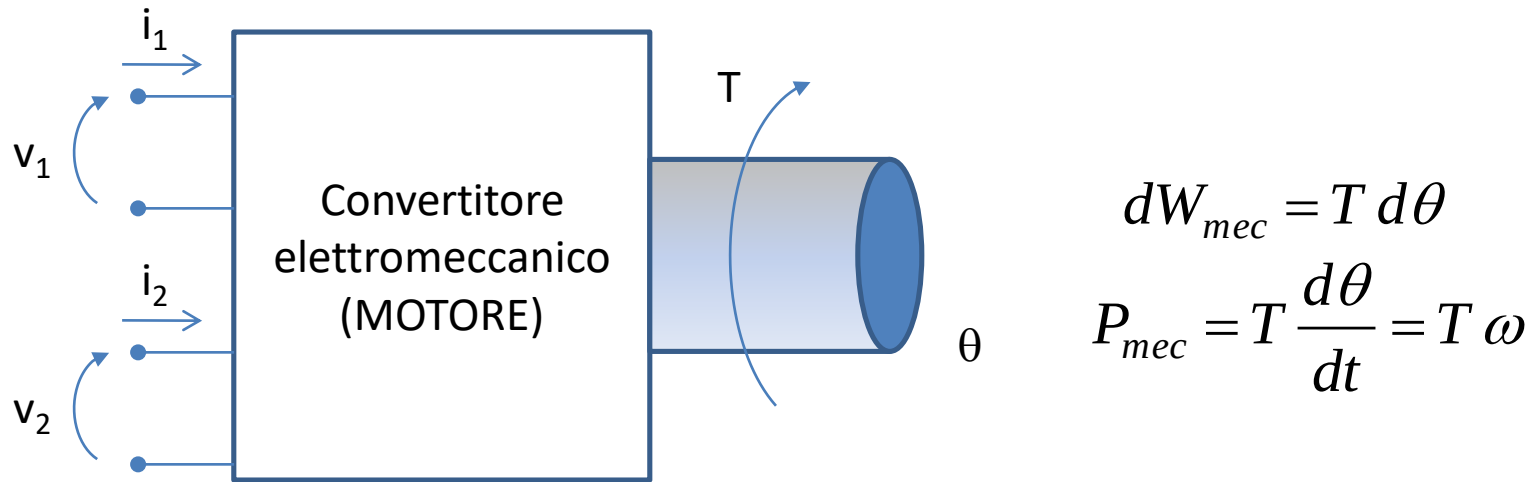
Consideriamo un convertitore elettromeccanico (motore o generatore), alimentato da  $n$  circuiti, che produce una coppia o potenza meccanica all'asse.

Ipotizziamo di poter trascurare la saturazione magnetica, ossia consideriamo i circuiti magnetici con permeabilità magnetica costante.

Trascuriamo inoltre i fenomeni di dissipazione della potenza, cioè le perdite.



Per semplicità di notazione, consideriamo il caso di due soli circuiti elettrici (il caso di più circuiti è analogo ma richiede l'uso di sommatorie appesantendo la notazione).



Da un bilancio energetico possiamo scrivere

$$\underbrace{v_1 i_1 dt + v_2 i_2 dt}_{\text{Energia elettrica entrante}} = \underbrace{dW_m}_{\text{Variazione di energia magnetica immagazzinata}} + \underbrace{T d\theta}_{\text{Energia spesa come lavoro meccanico della coppia sviluppata all'asse}} \quad (T1)$$

Energia elettrica entrante

Energia spesa come lavoro meccanico della coppia sviluppata all'asse

Variazione di energia magnetica immagazzinata

Inoltre, dalla legge di Faraday Lenz e trascurando le resistenze dei circuiti, si ha:

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} \quad v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} \quad (T2)$$

Quindi sostituendo in (T1):

$$\frac{d\lambda_1}{dt} i_1 dt + \frac{d\lambda_2}{dt} i_2 dt = d\lambda_1 i_1 + d\lambda_2 i_2 = dW_m + T d\theta \quad (T3)$$

Dette  $L_1$  e  $L_2$  le autoinduttanze dei due circuiti 1 e 2 e detta  $M$  la loro mutua induttanza, nell'ipotesi di linearità, l'espressione dell'energia magnetica immagazzinata è:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1(\theta) i_1^2 + \frac{1}{2} L_2(\theta) i_2^2 + M(\theta) i_1 i_2 \quad (T4)$$

e i flussi concatenati sono:

$$\lambda_1 = L_1(\theta) i_1 + M(\theta) i_2 \quad (T5)$$

$$\lambda_2 = M(\theta) i_1 + L_2(\theta) i_2 \quad (T6)$$

Si nota che, nell'ipotesi di linearità, le auto e mutue induttanze sono funzione della sola posizione del rotore  $\theta$ .

La dipendenza da  $\theta$  si giustifica in quanto la rotazione del rotore, porta ad una variazione della geometria del sistema e quindi della riluttanza incontrata dal flusso prodotto da ciascuno dei circuiti.

Ipotizziamo ora che, nell'intervallo  $dt$ , il sistema evolva a correnti costanti, cioè solo per moto della parte rotante, cioè:

$$di_1 = di_2 = 0 \quad (T7)$$

Allora il differenziale dell'energia magnetica e dei flussi diventa:

$$dW_m = \frac{1}{2}(dL_1)i_1^2 + \frac{1}{2}(dL_1)i_2^2 + (dM)i_1i_2 \quad (T8)$$

$$d\lambda_1 = (dL_1)i_1 + (dM)i_2 \quad (T9)$$

$$d\lambda_2 = (dM)i_1 + (dL_2)i_2 \quad (T10)$$

Moltiplicando (T9) per  $i_1$  e (T10) per  $i_2$  e sommando si ottiene:

$$d\lambda_1i_1 + d\lambda_2i_2 = dL_1 i_1^2 + 2dM i_1i_2 + dL_2 i_2^2 = 2dW_m \quad (T11)$$

Dalla (T11) la (T3) si può riscrivere come:

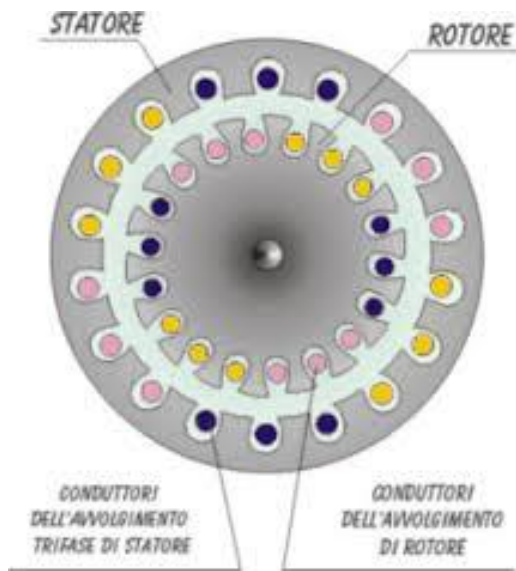
$$2dW_m = dW_m + T d\theta \longrightarrow dW_m = T d\theta$$



$$T = \left. \frac{dW_m}{d\theta} \right|_{\substack{i_1 = \text{cost} \\ i_2 = \text{cost}}} \quad (\text{T12})$$

**Quindi in un motore o generatore, in cui si possa trascurare la saturazione magnetica (ipotesi di linearità), si ha che la coppia all'asse è la derivata della energia magnetica immagazzinata rispetto alla posizione del rotore, derivata fatta tenendo costanti le correnti in tutti i circuiti elettrici di macchina.**

Espressione della coppia prodotta  
dall'interazione di un campo rotante di  
statore e un campo rotante di rotore



Si consideri ora una macchina elettrica con una certa distribuzione di corrente sullo statore e una certa distribuzione di corrente sul rotore.

Prendiamo ora le fondamentali dei campi rotanti prodotti dalle due distribuzioni di corrente in un certo istante di tempo.

Coppie polari avvolgimento di statore

$$B_s(\theta, \theta_s) = B_{s,\max} \cos\left(p_s (\theta - \theta_s)\right) \quad (\text{T13})$$

$$B_r(\theta, \theta_r) = B_{r,\max} \cos\left(p_r (\theta - \theta_r)\right) \quad (\text{T14})$$

Coppie polari avvolgimento di rotore

dove  $\theta_s$  e  $\theta_r$  sono le posizioni, al traferro, in cui i due campi assumono valore massimo.

Nell'ipotesi di permeabilità magnetica infinita dei nuclei magnetici e con traferro uniforme, l'energia magnetica immagazzinata nella macchina è quella immagazzinata al traferro ( $H=0$  nei nuclei). Pertanto l'energia magnetica è:



$$W_m(\theta_s, \theta_r) = \frac{1}{2\mu_0} LRg \int_0^{2\pi} [B_s(\theta, \theta_s) + B_r(\theta, \theta_r)]^2 d\theta \quad (T15)$$

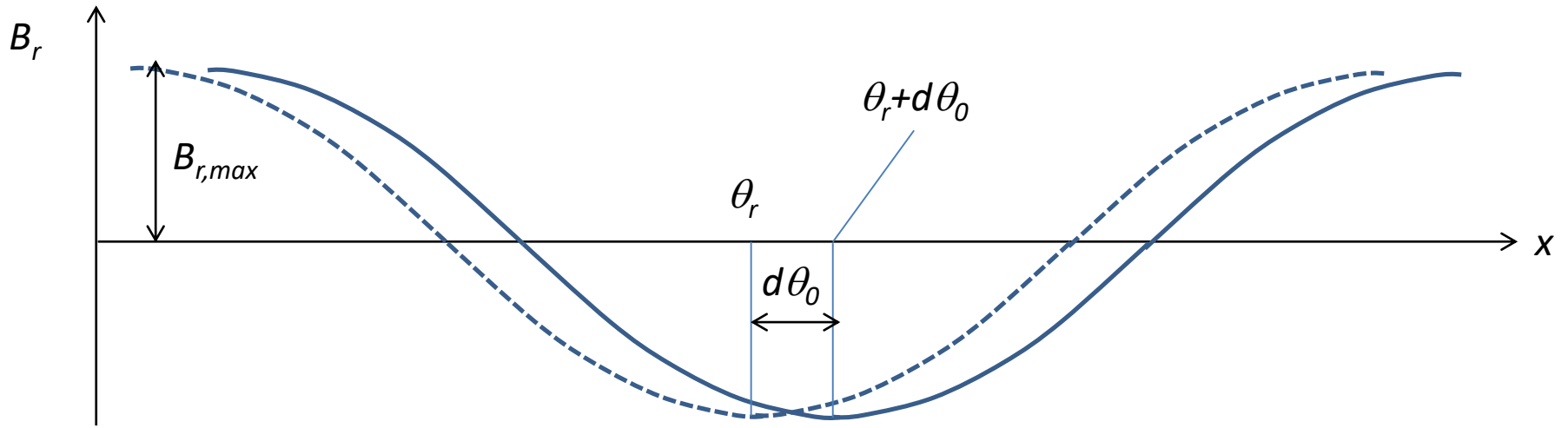
dove L è la lunghezza attiva di macchina, R il raggio al traferro e g l'ampiezza del traferro.

Usando (T13) e (T14) e sviluppando l'integrale, la (T15) dà:

$$W_m(\theta_s, \theta_r) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu_0} LRg \left( \pi B_{s,\max}^2 + \pi B_{r,\max}^2 \right) & \text{se } p_s \neq p_r \\ \frac{1}{2\mu_0} LRg \left( \pi B_{s,\max}^2 + \pi B_{r,\max}^2 + \pi B_{s,\max} B_{r,\max} \cos(p(\theta_s - \theta_r)) \right) & \text{se } p_s = p_r = p \end{cases} \quad (T16)$$

Sappiamo che la coppia è la deriva dell'energia magnetica rispetto alla posizione del rotore tenendo le correnti costanti.

Ora applicare una rotazione  $d\theta_0$  al rotore mantenendo le sue correnti costanti significa traslare di  $d\theta_0$  il campo  $B_r$  prodotto dalle correnti di rotore (le quali sono tenute costanti e quindi si spostano assieme al rotore). Applicare una rotazione  $d\theta_0$  al campo di rotore significa variare di  $d\theta_0$  la posizione  $\theta_r$  in cui il campo assume valore massimo (vedi figura).



Quindi la coppia si può calcolare come l'opposto derivata della (T16) rispetto alla posizione  $\theta_r$  dove il campo di rotore assume il valore massimo:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{d}{d\theta_r} W_m(\theta_s, \theta_r) = \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{se } p_s \neq p_r \\ \frac{1}{2\mu_0} LRg\pi p B_{s,\max} B_{r,\max} \sin\left(p(\theta_s - \theta_r)\right) & \text{se } p_s = p_r = p \end{cases} \quad (T17)
 \end{aligned}$$

Dalla (T17) si vede che, affinché il campo magnetico di statore e di rotore interagiscano generando coppia, i due campi devono avere lo stesso numero di poli.

Inoltre si vede che, per avere una coppia costante nel tempo («coppia utile»), la differenza  $\theta_s - \theta_r$  deve restare costante, cioè lo sfasamento tra le due sinusoidi che rappresentano il campo di statore e di rotore deve rimanere costante nel tempo. Questo si realizza se e solo se i due campi ruotano in modo sincrono tra di loro.

Inoltre si vede dalla (T17) che la coppia è nulla se  
il campo di statore e di rotore sono in fase ( $\theta_{\underline{s}}=\theta_{\underline{r}}$ )  
ed è massima quando sono in quadratura di fase,  
cioè  $p(\theta_{\underline{s}}-p\theta_{\underline{r}})=\pi/2$ .