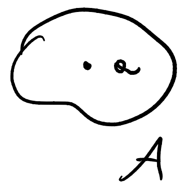
GEOMETRIA 1

LEZIONE 2

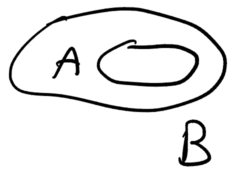
Insiemi

Sia A un insieme e a un elemento di A.



Scriveremo $\underline{a \in A}$

$\underline{A \subset B}$ A è sottoinsieme di B, cioè $a \in A \Rightarrow a \in B$. Scriveremo anche $\underline{B \supset A}$.

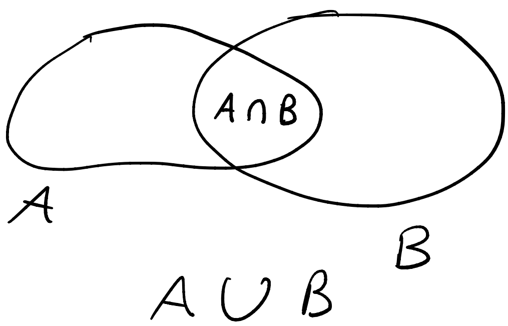


$\emptyset$ insieme vuoto. Si ha $\emptyset \subset A$, $A \subset A$.

Se A è sottoinsieme di B ma $A \neq B$, scriveremo $A \subsetneq B$.

$A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ e } a \in B\}$ intersezione di A e B

$A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ o } a \in B\}$ unione di A e B



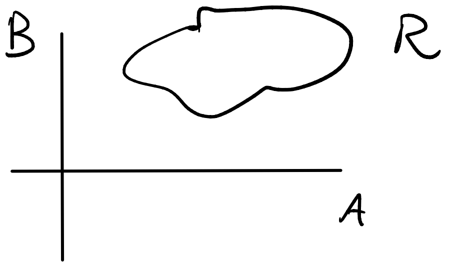
$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ prodotto cartesiano di A e B.

Relazioni

Siano A e B insiemi.

Def Una relazione tra A e B è un sottoinsieme

$$R \subset A \times B$$



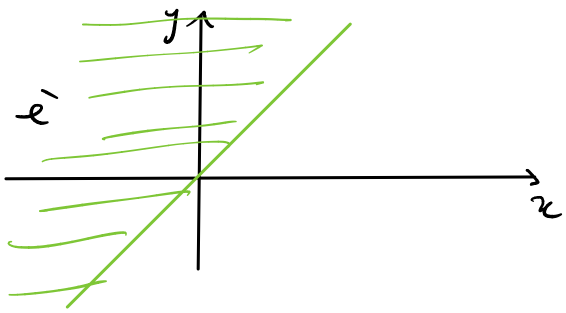
Se $(a, b) \in R$ scriveremo

$$a R b$$

Se $B = A$, una relazione tra A e A è detta relazione su A.

Esempio

$R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq y \}$ è la relazione di "minore o uguale"



Se R è una relazione su A diremo che:

1) R è riflessiva se $x R x$ per ogni $x \in A$
2) R è simmetrica se $x R y \Rightarrow y R x$
3) R è transitiva se $x R y$ e $y R z \Rightarrow x R z$

Def Una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è detta relazione d'equivalenza.

Esempi 1) La relazione di uguaglianza su un insieme A è una relazione d'equivalenza

2) L'equipollenza tra segmenti orientati nel piano è una relazione d'equivalenza.

In genere una relazione d'equivalenza si denota con tilde $\sim$ anziché con R

Es. Se $\vec{AB}$ è equipollente a $\vec{CD}$ scriveremo $\vec{AB} \sim \vec{CD}$.

Funzioni (o applicazioni o mappe)

Siano A e B insiemi.

Def Una funzione $f : A \to B$ consiste di una relazione $G_f \subset A \times B$ che soddisfa la proprietà seguente: per ogni $a \in A$ esiste ed è unico un elemento di B, denotato con $f(a) \in B$, tale che $(a, f(a)) \in G_f$. $f(a)$ si chiama immagine di a.

La relazione G_f che determina la funzione f è detta grafico di f.

L'insieme di partenza A si chiama dominio di f $\quad \mathrm{dom} f = A$

L'insieme di arrivo B si chiama codominio di f $\quad \mathrm{codom} f = B$

Un modo equivalente per definire una funzione $f : A \to B$ consiste nel precisare, per ogni $a \in A$, $f(a) \in B$

Esempi 1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$

$f : A \to B$ è una funzione

$1 \mapsto 2$

$2 \mapsto 2$

$3 \mapsto 1$

(Spesso si scrive $a \mapsto f(a)$)

$G_f = \{(1,2), (2,2), (3,1)\}$.

2) $G = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$ non è il grafico di una funzione (perché?)

3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ 4) $g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 3x$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{x}$

Sono funzioni.

Composizione di funzioni

Siano $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funzioni

Definiamo la funzione composta di f con g (in notazione $g \circ f$) come la funzione

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$
$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

E' importante rispettare l'ordine!

Si noti che la composizione $g \circ f$ è definita solo se $\operatorname{codom}(f) = \operatorname{dom}(g)$.

E' utile far riferimento al diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Esempio $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f(x) = |x+2|$ $\qquad$ $g(n) = \frac{1}{n+1}$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{Q}$$

$$(g \circ f)(x) = g(|x+2|) = \frac{1}{|x+2|+1}.$$

A insieme $\leadsto$ $id_A : A \longrightarrow A$ $\quad id_A(a) = a \quad \forall a \in A$

funzione identica

$f : A \to B \rightsquigarrow f \circ id_A = f \quad , \quad id_B \circ f = f.$

Operazioni binarie

Sia A un insieme

Def Un'operazione binaria su A è una funzione $t : A \times A \to A$. L'immagine $t(a,b)$ si denota con ab, cioè $ab = t(a,b)$.

Un'operazione binaria è detta

1) associativa se $a(bc) = (ab)c$ per ogni $a,b,c \in A$
2) commutativa se $ab = ba$ per ogni $a,b \in A$

Un elemento $u \in A$ è detto elemento neutro se

$$ua = au = a \quad \forall a \in A$$

per ogni.

Se esiste un elemento neutro $u \in A$, un elemento $a \in A$ è detto invertibile se $\exists\, b \in A$ t.c.

esiste

$$ab = ba = u$$ e si scrive $b = a^{-1}$.

Oss Per un'operazione binaria associativa possiamo omettere le parentesi: abc anziché $a(bc)$ o $(ab)c$.
Questo semplifica molto il calcolo.

Gruppi

Def Un gruppo è un insieme non vuoto G munito di un'operazione binaria $\cdot : G \times G \to G$ tale che:

1) $\cdot$ è associativa: $g(hk) = (gh)k \quad \forall g, h, k \in G$
2) esiste un elemento neutro $u \in G$: $gu = ug = g \quad \forall g \in G$
3) ogni $g \in G$ ammette un inverso $g^{-1} \in G$: $gg^{-1} = g^{-1}g = u$.

OSS Non chiediamo che valga la proprietà commutativa. La proprietà associativa è molto più importante. Spesso l'elemento neutro di G si denota con 1_G o semplicemente con 1.

Esempi 1) gruppo banale $O = \{1\}$ con l'unica operazione possibile $1 \cdot 1 = 1$.

2) $\mathbb{R} - \{0\}$ rispetto alla moltiplicazione usuale xy
3) $\mathbb{R}$ rispetto all'addizione $x+y$
4) $\mathbb{Z}$ (insieme dei numeri interi) rispetto all'addizione $n+m$

OSS $\mathbb{R}$ non è gruppo rispetto alla moltiplicazione perché 0 non è invertibile.
$\mathbb{Z} - \{0\}$ non è gruppo rispetto alla moltiplicazione perché gli unici elementi invertibili sono 1 e -1.

Def Un gruppo è detto abeliano o commutativo se l'operazione di gruppo è anche commutativa.

I gruppi visti sopra sono abeliani.

Spesso l'operazione di un gruppo abeliano G viene scritta in notazione additiva $+$ cioè $a+b$ anziché ab. In questo caso l'elemento neutro viene denotato con 0_G oppure 0 e l'inverso di $a \in G$ con $-a$ anziché a^{-1}

Avremo quindi
$$a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$$
$$a+b = b+a$$
$$a+0 = 0+a = a$$
$$a-a = 0.$$

G gruppo $n \in \mathbb{Z}$ $\leadsto$ definiamo la potenza g^n come
$$g^n = \underbrace{g\, g \cdots g}_{n \text{ volte}} \quad \text{se } n \geq 1$$
$$g^n = g^{-n} \quad \text{se } n \leq -1$$
$$g^0 = 1_G$$

In notazione additiva scriveremo

$$ng = \begin{cases} g+\cdots+g & (n \text{ volte}) \text{ se } n \geq 1 \\ (-n)g & \text{se } n \leq -1 \\ 0_G & \text{se } n = 0. \end{cases}$$