PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2019/2020

24 settembre 2020

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo unico
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo discreto**

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\frac{1}{10}x_1(k) + 8x_2(k) + \frac{1}{3}\,u_1(k) - \frac{2}{9}\,u_2(k) \\ x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_2(k) + u_2(k) \\ y(k) &= 3x_1(k) - 2\,x_2(k) + 12\,u_1(k) \end{aligned}$$

Domanda 1.1

Si individui una funzione **quadratica** di Lyapunov $V(x_1, x_2)$ che permetta di provare la stabilità asintotica del sistema, e che inoltre sia tale che la differenza prima rispetto al tempo $\Delta V(x_1, x_2)$ soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \Delta V(1,0) &\leq -9 \\ \Delta V(0,1) &\leq -16 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Risposta 1.1}}$ Matrice A del sistema LTI e tempo discreto

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Della $V(x_1, x_2)$ conosciamo

$$\Delta V = -x^T Q x$$

dalla dimostrazione del Teorema di Lyapunov per sistemi lineari

$$Q = \begin{bmatrix} +9 & 0 \\ 0 & +16 \end{bmatrix}$$

Allora $V(x_1, x_2)$ è $x^T P x$ con P soluzione di

$$A^T P A - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_2 - p_3^2 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo si arriva a

$$\begin{bmatrix} 9-\frac{99}{100}P_1 & -\frac{4}{5}P_1-\frac{21}{20}P_3 \\ -\frac{4}{5}P_1-\frac{21}{20}P_3 & 64P_1-\frac{3}{4}P_2+8P_3+16 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de aici

$$9-\frac{99}{100}P_1=0 \longrightarrow P_1=\frac{\cancel{9}\cdot 100}{\cancel{99}\,11}=\frac{100}{11} \simeq 9{,}0909\ldots$$

$$\frac{4}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{100}^{20}}{11}+\frac{21}{20}P_3=0 \longrightarrow P_3=-\frac{80}{11}\cdot\frac{20}{21}=-\frac{1600}{231} \simeq -6{,}9264$$

$$64P_1-\frac{3}{4}P_2+8P_3+16=0$$

$$64\cdot\frac{100}{11}+8\left(-\frac{1600}{231}\right)+16=\frac{3}{4}P_2$$

$$P_2=\frac{4}{3}\left[16+\frac{6400}{11}-\frac{12800}{\underset{11\cdot 21}{231}}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{16\cdot 11\cdot 21+6400\cdot 21-12800}{11\cdot 21}\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{125296}{231}=\frac{501184}{693} \simeq 723{,}2092$$

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 9,\overline{09} & -6,9264 \\ -6,9264 & 723,2052 \end{bmatrix}$$

Domanda 1.2

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo continuo**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= +8\,x_2(t) + 3\,u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -8\,x_1(t) + u(t)\\ y(t) &= 3\,x_1(t) + 12\,x_2(t)\end{aligned}$$

Lo si vuole discretizzare per campionamento (con la *tecnica di campionamento e tenuta*), utilizzando il valore $T_s = \pi$ s per il periodo di campionamento.
Determinare le matrici A, B, C e D della descrizione a segnali campionati del sistema.
Commentare il risultato ottenuto.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +8 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \pi$$

$$x(k+1) = A_d\, x(k) + B_d\, u(k)$$
$$y(k) = C_d\, x(k) + D_d\, u(k)$$

dove

$$A_d = e^{A\Delta} \qquad B_d = \int_0^\Delta e^{A\tau} B\, d\tau = A^{-1}\left[e^{A\Delta} - I\right]\cdot B$$

$$C_d = C \qquad D_d = D$$

Conviene questa via:

$$e^{A\Delta} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI - A)^{-1} \right\}\Big|_{t=\Delta} \longrightarrow$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI - A)^{-1} \right\}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -8 \\ +8 & s \end{bmatrix} \qquad \det(sI - A) = s^2 + 64$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+64} \begin{bmatrix} s & -8 \\ +8 & s \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{s^2+64} \begin{bmatrix} s & 8 \\ -8 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+8^2} & \dfrac{8}{s^2+8^2} \\ -\dfrac{8}{s^2+8^2} & \dfrac{s}{s^2+8^2} \end{bmatrix}$$

Essendo

$$\frac{s}{s^2+\omega^2} \Longleftrightarrow \cos(\omega t) \cdot 1(t)$$

$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Longleftrightarrow \operatorname{sen}(\omega t) \cdot 1(t)$$

Ottengo :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(8t) \cdot 1(t) & \operatorname{sen}(8t) \cdot 1(t) \\ -\operatorname{sen}(8t) \cdot 1(t) & \cos(8t)\, 1(t) \end{bmatrix}$$

e per $t = \Delta = \pi$

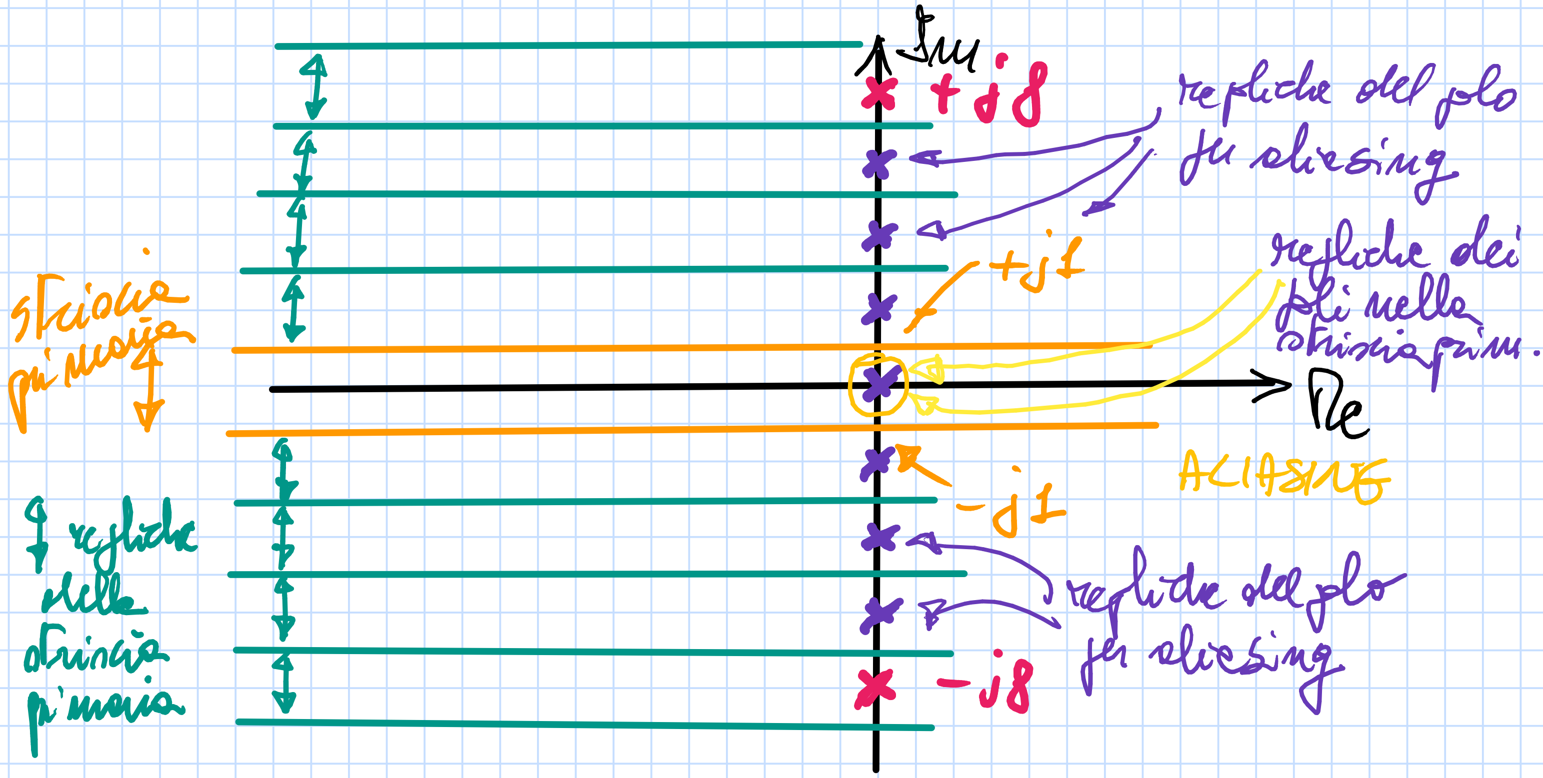
$$e^{A\Delta} = e^{A\pi} = \begin{bmatrix} \cos(8\pi) & \operatorname{sen}(8\pi) \\ -\operatorname{sen}(8\pi) & \cos(8\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ALIASING
Come se fossero stati un autovalore doppio in $\emptyset$!

Aliasing!! Gli autovalori della matrice A sono $\pm j8$ e sono ESTERNI alla striscia primaria $\pm j\frac{\Omega_s}{2}$ con $\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$

se $\Delta = \pi$ $\quad \Omega_s = 2$

striscia primaria $\pm j1$



$$B_1 = A^{-1}\left[e^{A\Delta} - I\right]\cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{A\Delta} = I$$

$C_1 = C$ $\quad D_1 = D$