Esercizi su stabilità di sistemi dinamici a tempo discreto

Funzioni di Lyapunov

Teorema di Lyapunov per sistemi LTI

Analisi degli autovalori

Sistemi Dinamici

a.a. 2021/22

Es. 1

Dato il sistema LTI a tempo discreto

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Studiare la stabilità del sistema.

I° modo: analisi degli autovalori della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & +\frac{1}{2} \\ +1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

autovalori

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad |\lambda_{1,2}| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Di conseguenza sistema asintoticamente stabile.

II° modo: utilizzo del teorema di Lyapunov

scelta Q simmetrica e def. positiva, risolvere

$$A^T P A - P = -Q$$

cercando P simmetrica e def. positiva

Se e solo se esiste P simmetrica e def. pos. che risolve, allora il sistema è asintoticamente stabile

Scegliendo $Q = I$ si risolve

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con $\begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_2 - \bar{p}^2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} -\bar{p} & -p_2 \\ -\frac{p_1}{2} & -\frac{\bar{p}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_2 & \bar{p}/2 \\ \bar{p}/2 & p_1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & \bar{p} \\ \bar{p} & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (p_2 - p_1) & -\bar{p}/2 \\ -\bar{p}/2 & (p_1/4 - p_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (P_2 - P_1) & -\frac{\bar{P}}{2} \\ -\frac{\bar{P}}{2} & \left(\frac{P_1}{4} - P_2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_2 - P_1 = -1 \\ -\frac{\bar{P}}{2} = 0 \\ \frac{P_1}{4} - P_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{P} = 0 \\ P_1 = P_2 + 1 \\ P_1 = -4 + 4P_2 \end{cases}$$

$$\bar{P} = 0 \qquad P_2 + 1 = 4P_2 - 4$$

$$P_1 = P_2 + 1 \qquad 3P_2 = 5 \qquad P_2 = 5/3$$

$p_2 = 5/3 \qquad p_1 = 1 + 5/3 = 8/3 \qquad \bar{p} = 0$

$$P = \begin{bmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 5/3 \end{bmatrix}$$

check: $\quad p_1 > 0 \quad ✓$

$\qquad\qquad p_1 p_2 - \bar{p}^2 = \frac{40}{9} > 0 \quad ✓$

P è simmetrica e def. pos.

$\Rightarrow$ il sistema è asintoticamente stabile

$\boxed{\text{Es. 2}}$

Dato il sistema LTI a tempo discreto

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Studiare la stabilità del sistema.

I° modo: autovalori della matrice A

$$p_A(\lambda) = \det\left[\lambda I - A\right] = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2 \qquad |\lambda_{1,2}| > 1 \implies \text{sistema instabile!}$$

II° modo: utilizzo di una funzione di Lyapunov

NB con una funzione di Lyapunov è possibile stabilire se uno stato di equilibrio sia es. stabile, sempl. stabile oppure instabile!

Quale è lo stato di equilibrio in questione?

$$x(k+1) = A\, x(k) \qquad \text{quindi} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V(x) = x^T P x$ ← conviene sceglierla come forma quadratica per sfruttare l'eq. di Lyapunov

P simmetrica e def pos.

$P = I$

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$V(0) = 0$ ✓ $\quad V(x) > 0$ ✓ $\quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Voluto $\Delta V(x) = -x^T Q x$

sfrutto con $A^T P A - P = -Q$

l'eq. di Lyapunov

$P = I$

$$A^T A - I =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -Q$$

Ma allora $\Delta V(x)$ è def. positiva

lo stato di equilibrio è instabile!

Dato che il sistema è LTI, l'instabilità dello stato d'equilibrio appena analizzato diventa (al solito per i sistemi LTI) proprietà del sistema $\Rightarrow$ sistema instabile //

Es. 3

Determinare la stabilità dello stato di equilibrio $\bar{x} = 0$ per il sistema

$$x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\left[x(k)\right]$$

8° modo

Utilizzo del sistema linearizzato

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}\Bigg|_{x=\bar{x}} \qquad \begin{aligned} i &= 1, \dots n \\ j &= 1, \dots n \end{aligned}$$

$n = 1$

$$A = a = \frac{df}{dx}\bigg|_{\bar{x}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos x \bigg|_{\bar{x}=0}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$$

$a = \frac{7}{6}$ ← l'unico autovalore ha modulo > 1 !!

$\Downarrow$

lo stato di equilibrio è instabile!

$\boxed{\text{II}^\circ \text{ modo}}$

Utilizzo di una funzione di Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{4} x^2$$

$$V(0) = 0 \qquad \checkmark$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \qquad \checkmark$$

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

$$x(k+1) = \frac{1}{2} x(k) + \frac{2}{3} \sin[x(k)]$$

$$\Delta V(x) = \left[\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x\right]^2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}x^2} + \frac{4}{9}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{3}x \operatorname{sen} x \cancel{- \frac{1}{4}x^2}$$

Sviluppo in serie $\operatorname{sen} x \simeq x$ (in un opportuno intorno di $\bar{x}=0$)

$$\Delta V(x) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x^2 > 0$$

def. positiva!

equilibrio instabile!

$\boxed{\text{Es. 4}}$

Il sistema descritto dall'equazione

$$x(k+1) = x(k)\left[x(k) - 1\right]$$

ha 2 stati di equilibrio.

Analizzare la stabilità di ciascuno dei 2 stati d'equilibrio

Stati di equilibrio

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{x} - 1)$$

$$\bar{x}^2 - 2\bar{x} = 0$$

$$\bar{x}_1 = 0 \qquad \bar{x}_2 = +2$$

~~2 stati~~ di equilibrio

Analisi di stabilità

I° modo: utilizzo del sistema linearizzato

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} = 1(\bar{x} - 1) + \bar{x} = 2\bar{x} - 1$$

$$A_1 = -1 \qquad \bar{x} = 0$$

$$A_2 = +3 \qquad \bar{x} = 2$$

$A_1 = -1 \leftarrow$ modulo 1 $\rightarrow$ non si può dire nulla sulla stabilità

$A_2 = +3 \leftarrow$ modulo > 1 $\Longrightarrow$ stato di equilibrio INSTABILE!

II° modo: utilizzo di una funzione di Lyapunov

Sia $V(x) = x^2$

1° stato di equilibrio $\bar{x}_1 = 0$

$V(\bar{x}_1) = 0$ ✓

$V(x) > 0$ ✓ $\forall x \neq \bar{x}_1$ in un opportuno intorno di $\bar{x}_1$

$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) \Longleftrightarrow$

$$\Delta V = \left[x(x-1)\right]^2 - x^2$$

$$x(k+1) = x(k)\left[x(k) - 1\right]$$

$$\Delta V = x^4 + \cancel{x^2} - 2x^3 - \cancel{x^2} = -2x^3 + x^4$$

für x: $0 < |x| \ll 1 \Rightarrow 2x^3 \gg x^4$

$$\Delta V = -2x^3 + x^4$$

per x: $0 < |x| \ll 1 \Rightarrow 2x^3 \gg x^4$

quindi: $x > 0 \Rightarrow \Delta V < 0$

$x < 0 \Rightarrow \Delta V > 0$

ΔV non definita!

In conclusione: $\bar{x}_1 = 0$ è stato di equilibrio [redacted]

NON posso decidere

2° stato di equilibrio $\bar{x}_2 = +2$

$$V(x) = (x-2)^2$$

$$V(\bar{x}_2) = 0 \quad \checkmark$$

$$V(x) > 0 \quad \checkmark \quad x \neq \bar{x}_2$$ in un opportuno intorno

$$\Delta V = \left[x(k+1) - 2\right]^2 - \left[x(k) - 2\right]^2$$

$$= \left[x(x-1) - 2\right]^2 - (x-2)^2$$

$$x^2 - x - 2$$

$$x(k+1) = x(k)\left[x(k) - 1\right]$$

$$\Delta V = (x+2)^2 + x^4 - 2x^2(x+2) - (x-2)^2 \Longrightarrow$$

$$\Delta V = x^4 + \cancel{x^2} + 4x \cancel{+4} - 2x^3 - 2x^2 \cancel{-x^2} + 4x \cancel{+4}$$

$$\stackrel{!}{=} 8x - 2x^2 - 2x^3 + x^4 \quad \text{che segno ha?}$$

in un intorno di $\bar{x}_2$ $\Leftarrow$ $x = \bar{x}_2 + \delta = +2 + \delta$

$$\delta \in \mathbb{R} : |\delta| \ll 1$$

$$\Delta V = 8(2+\delta) - 2(2+\delta)^2 - 2(2+\delta)^3 + (2+\delta)^4$$

$$\stackrel{!}{=} -7$$

$$\Delta V \simeq 16 + \cancel{8\delta} - 8 - \cancel{8\delta} - \cancel{16} - 24\delta + \cancel{16} + 32\delta$$

$|\delta| \ll 1 \rightarrow$ trascuro TUTTE le potenze di δ con esponente > 1

$$\simeq 8(1+\delta) > 0$$

$\Uparrow$

$|\delta| \ll 1$

$\overline{x}_2$ è stato di equilibrio instabile!