

Stabilità

Applicazione della
trasformazione bilineare
e del criterio di Routh-Hurwitz
(richiami da "Fond. di
Automata")

Sistemi Dinamici

a.a. 2021/22

Es. Studiare la stabilità interna del sistema LT,

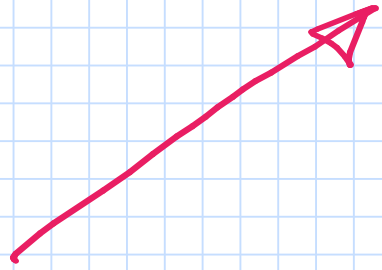
$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

polinomio caratteristico

$$P_A(z) = \det(zI - A) = z^3 - 5z^2 + 27z + 5$$

$$P_A(z) = z^3 - 5z^2 + 2z + 5$$

NON benevole da fattorizzare
(ricerca di radici del polinomio
per via numerica con la tecnica
di bisezione p.e. cs.)



Allora non è
conveniente
utilizzare

- analisi degli autovalori della matrice A
- forma di Jordan della matrice A

È conveniente invece far uso della trasformazione
di Lincere per analizzare il polinomio caratteristico

B Nel corso vedremo un
ulteriore approccio utile a
stabilire se il sistema LTI
è stabile o meno \rightarrow applicheremo
il Teorema di Lyapunov per
i sistemi dinamici lineari
[prossimamente!]

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad p(z) \rightarrow q(w)$$

Richiami

Per sostituzione nell'equazione $p(z) = 0$

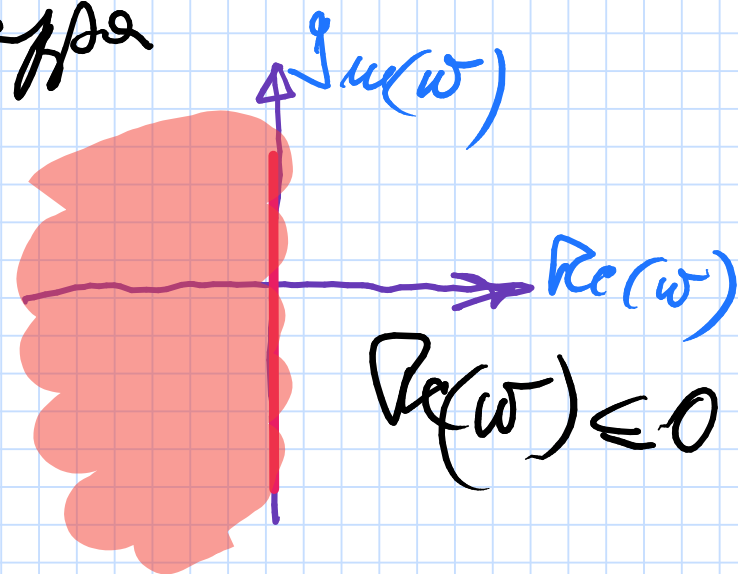
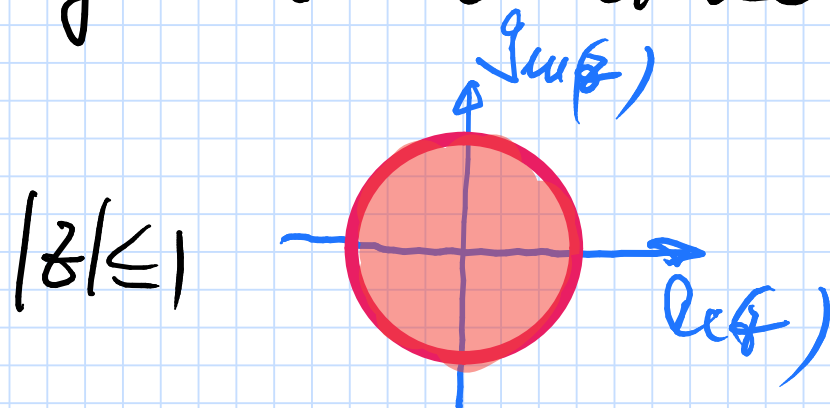
$$z^3 - 5z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \Rightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 5 = 0$$

moltiplicando per $(w-1)^3$ e riordinando i vari termini si ottiene l'equazione $q(w) = 0$

$$3w^3 - 19w^2 + 21w + 3 = 0$$

La trasformazione bilineare mappa



Da è possibile valutare le radici di $q(w)$ [distinguendo tra radici con $\text{Re}(w) < 0$ e radici con $\text{Re}(w) \geq 0$] per poi discutere delle radici del polinomio originario $p(z)$

Tabella di Routh - Hurwitz per $g(w)$

$$g(w) = 3w^2 - 19w + 21$$

+	3	3	21
-	2	-19	3
+	1	$\frac{40}{19}$	
+	0	3	

$$\frac{(-19) \cdot 21 - 9}{-19}$$

2 variazioni di segno
↓
2 radici di $g(w)$ hanno
 $\text{Re}(w) > 0$

In definitiva

2 radici di $P(s)$ con
modulo maggiore di 1



Il sistema è instabile

$f(z) = 0$ \leftarrow stima numerica
delle radici

$$z_1 \approx -0,77$$

$$z_2 \approx +1,52$$

$$z_3 \approx +4,75$$

Stabilità

Critici basati sugli autorolanti

Riduzione da

"Fondamenti di Automazione"

Sistemi Dinamici

22. 2021/22

Es Determinare gli stati d'equilibrio del sistema
LTI in evoluzione libera

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = -x_1(k) \end{cases}$$

Per l'esistenza di stati d'equilibrio deve ammettere soluzione il sistema

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1 \end{cases} \quad \text{unica soluzione}$$
$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo stato di equilibrio trovato è stato stabile, es. stabile, instabile?

Il sistema LTI studiato è stabile, es. stabile oppure instabile?

1° test: autovalori della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(d) &= \det(dI - A) \\ &= \begin{vmatrix} d & -1 \\ +1 & d \end{vmatrix} = d^2 + 1 \end{aligned}$$

$$P_A(d) = d^2 + 1 \Rightarrow$$

$$p_{2,1} = \pm j$$

conjugati

$$|p_{2,1}| = 1$$

semplici

stato d'equilibrio



semplicemente

sistemi LTI



debile

Quale è la forma di Jordan della matrice A ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = i$$

$$\lambda_2 = -i$$

$$\Delta_A = \{i, -i\}$$

→ sono complessi
coniugati. Anche
gli autovettori!

→ sono 2 autovalori
distinti!

La matrice è diagonalizzabile!

$$\ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{bmatrix} +j & 1 \\ -1 & +j \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} j\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \\ -\sigma_1 + j\sigma_2 = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = -j\sigma_1$$

$$\sigma_1 = j\sigma_2 \quad / \cdot (-j)$$

$$-j\sigma_1 = \sigma_2$$

$$\ker \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A - z_j I) = \langle \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

$$T = \begin{bmatrix} j & -j \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det T = z_j$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0,5j & 0,5 \\ +0,5j & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$J_A = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$