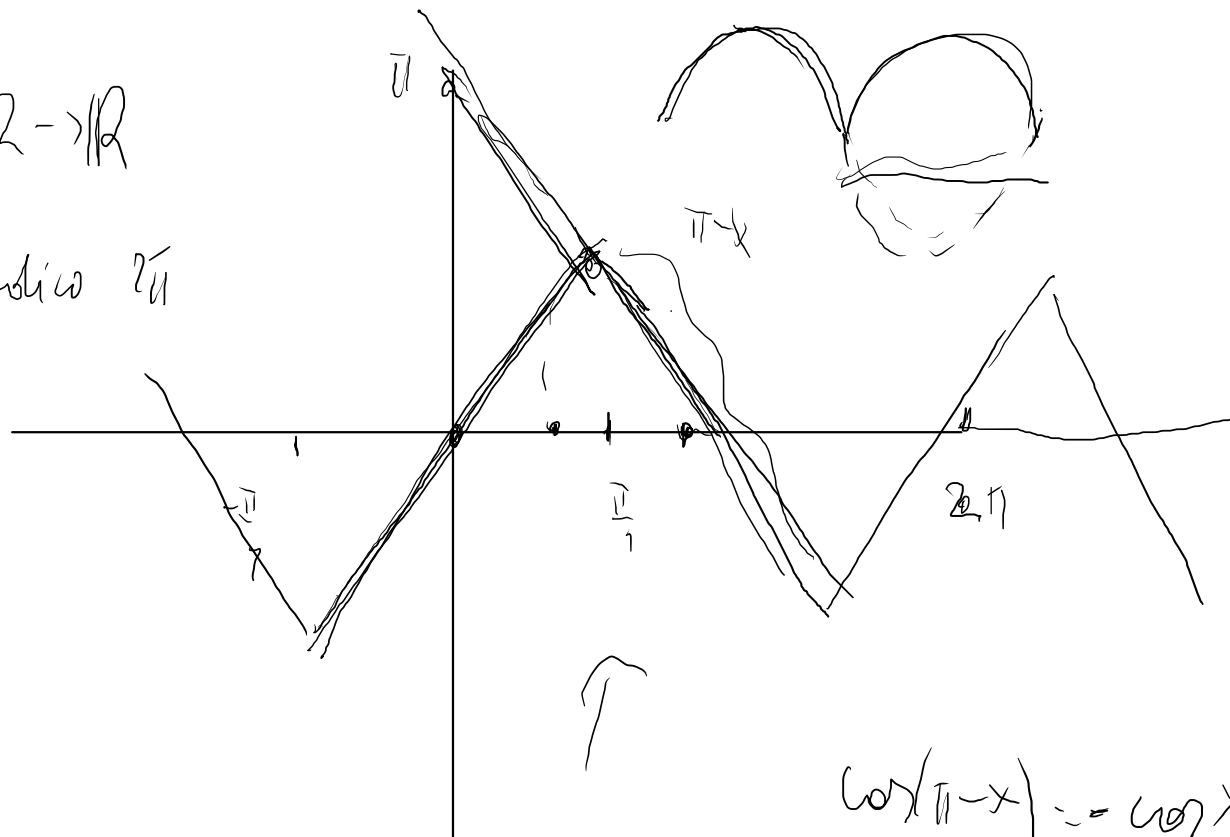
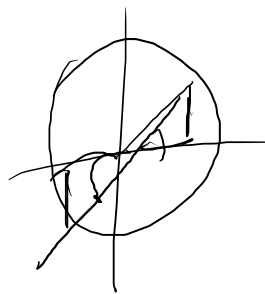
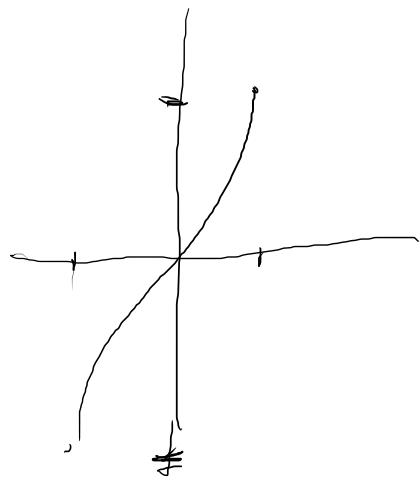


$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$

$|\sin(x)| \leq 1$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
periodic 2π



$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

for $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\arcsin(\sin(x)) = x$

for $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} + d)) = \frac{\pi}{2} - d$$

$\parallel$
 $\arcsin(\frac{\pi}{2} - d)$

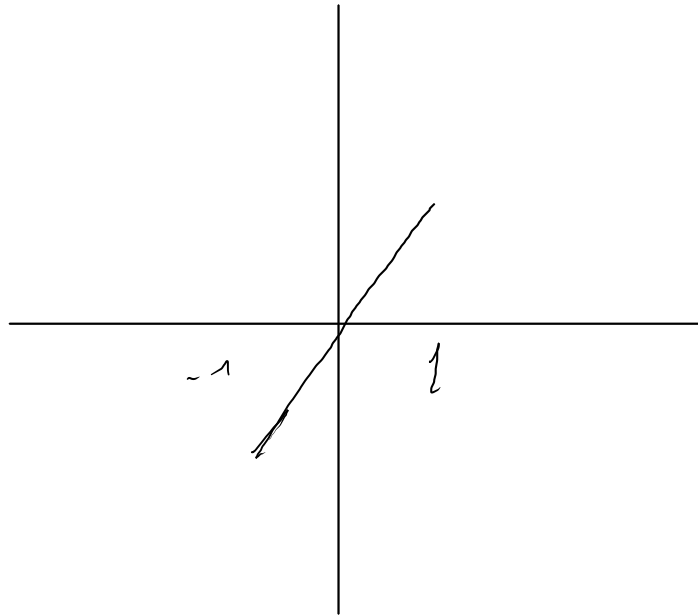
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + d\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - d\right)$$

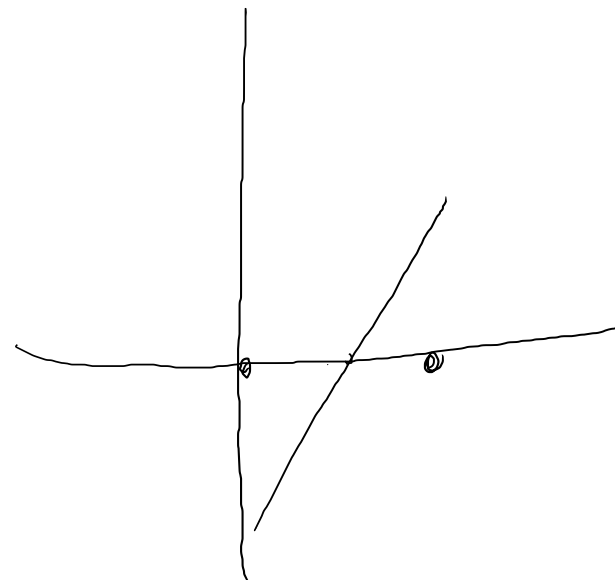
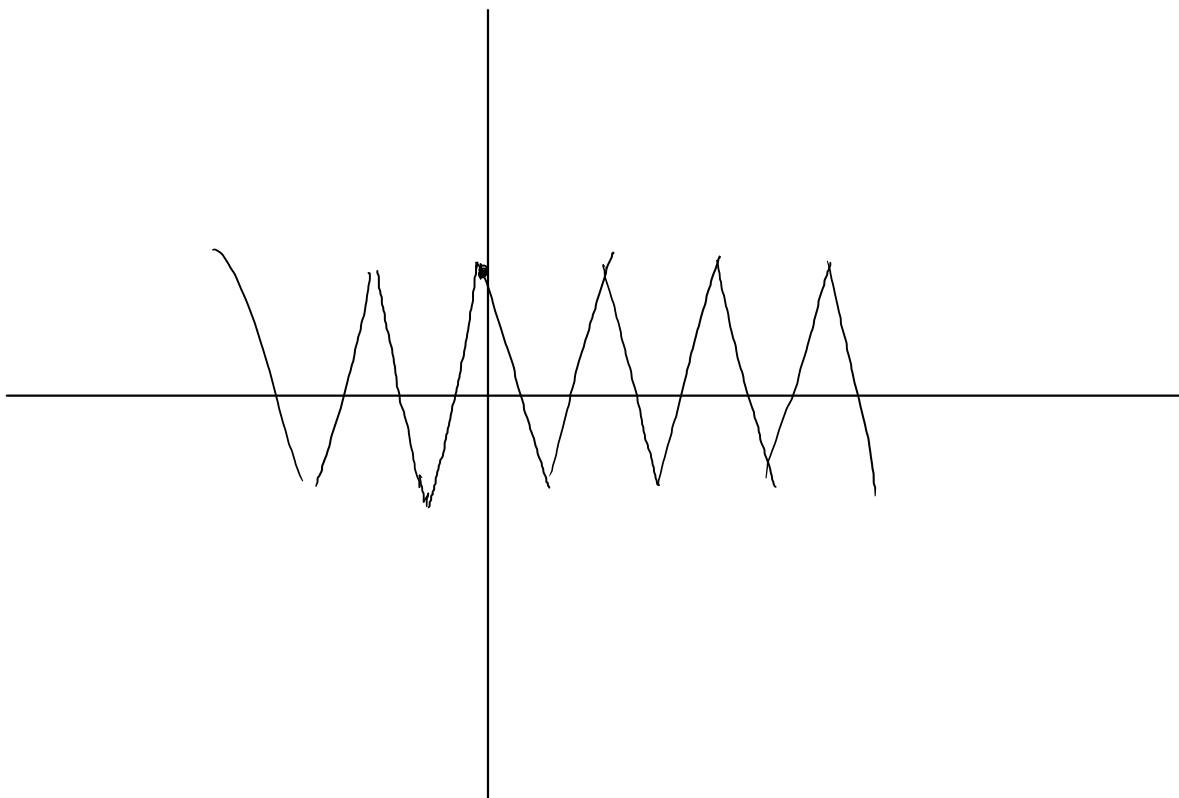


$$f(x) = \sin(\arcsin x)$$

$$= x$$

$$\text{dom } f = [-1, 1]$$



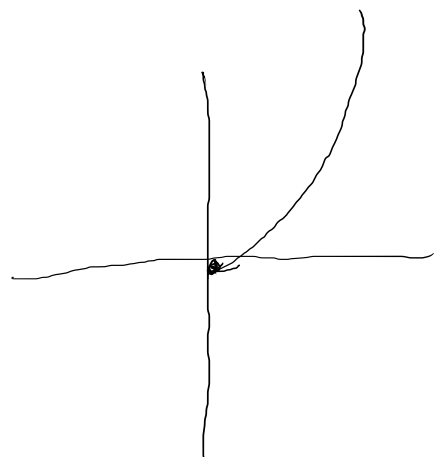


$$\sin(x) \text{ or } \sin(x-1)$$

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

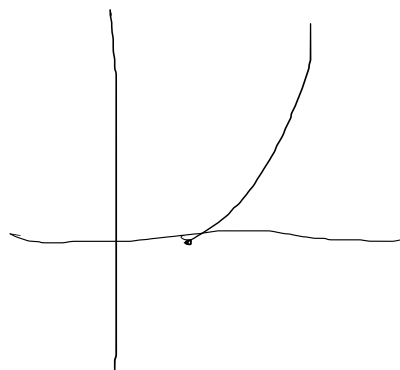
$$0 \leq x \leq 2$$

$$x \ln x$$



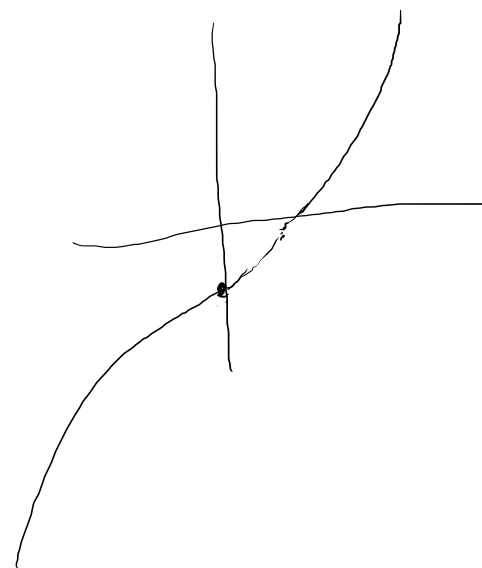
$$x > 0$$

$$(x-1) \ln(x-1)$$



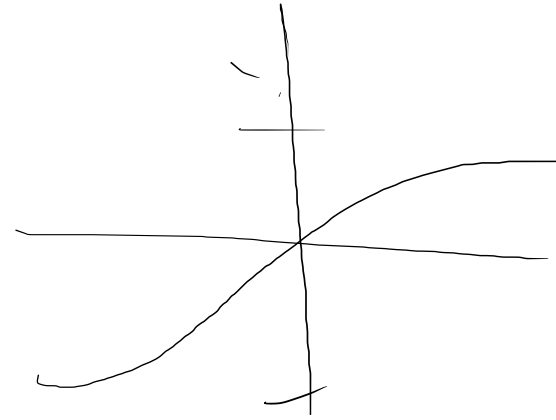
$$x < 0$$

$$(x-1) \ln(-x-1)$$



Successioni di numeri reali

$$(x_n)_n \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$



Successioni limitate

$$\exists M \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| < M$$

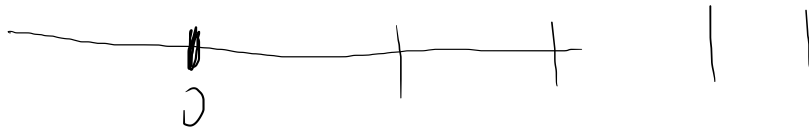
Successione illimitata superiormente

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M : x_{n_M} > M$$

$$\exists M : \forall n \quad x_n \leq M$$

$$x_{2k} = 0$$

$$x_{2k+1} = 2k+1$$



$$x_n$$

Successioni monotone

(x_n)

$$f(n_1) = x_{n_1}$$

$$\forall n_1 < n_2 \quad x_{n_1} < x_{n_2}$$

$$\exists k \in \mathbb{N}^+ : n_2 = n_1 + k = \left(\left((n_1 + 1) + 1 \right) + 1 \right) + \dots + 1$$

Definizione equivalente: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1}$$

$$x_{n_1} < x_{n_1+1} < x_{(n_1+1)+1} < \dots < x_{n_1+k} = x_{n_2}$$

Teorema

[decreasce]

Una successione $(x_n)_n$ è strettamente crescente se e solo se $\forall n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1} \quad [x_n > x_{n+1}] \quad [\text{debolmente} \leq \geq]$$

Es: $X_n = \frac{n}{n^2+1}$ $(X_n)_n$

la successione è limitata $\frac{n}{n^2+1} < 1 \quad \forall n$

infatti $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < n^2 < n^2+1$ e quindi $\frac{n}{n^2+1} < 1$

la successione è monotona? decrecente NO!

$$X_{n+1} < X_n \quad \forall n$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

$$(n+1)(n^2+1) < n(n^2+2n+2)$$

$$\cancel{n^3 + n + n^2 + 1} < \cancel{n^3 + 2n^2 + 2n}$$

$$X_0 = 0$$

$$X_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$1 < n^2 + n \quad \text{per } n \geq 1$$

la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è decrescente. Tuttavia la successione

$(X_n)_{n \geq 1}$ è decrescente. Diciamo che la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è

definitivamente decrescente.

Definizione Sia P una proprietà; diremo che una successione $(x_n)_n$ soddisfa P definitivamente se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la successione $(x_n)_{n \geq n_0}$ soddisfa P .

Es: $x_n = n^2 - 10n$

$$f(t) = t^2 - 10t$$

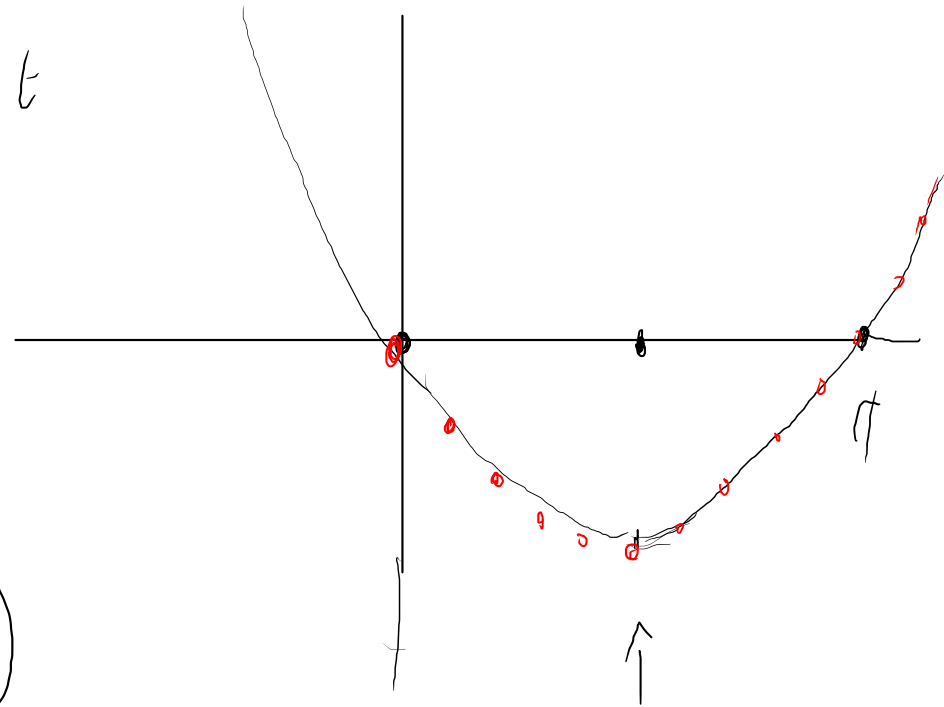
$$t(t-10)$$

la successione $(x_n)_n$ è

definitivamente crescente e positivo,

è superiormente illimitato ($\sup x_n = +\infty$)

è inferiormente limitato ($\inf x_n = -25$)



$(X_n)_n$ Fibonacci

$$X_{n+1} = X_{n-1} + X_n$$

$$X_0 = X_1 = 1$$

La successione è crescente (definitivamente, strettamente crescente)

positiva ($\min X_n = 1$)

illimitata sup.

1 1 2 3 5 8 13

$$Y_n = \frac{X_{n+1}}{X_n}$$

$(Y_n)_n$

crescente? decrescente?

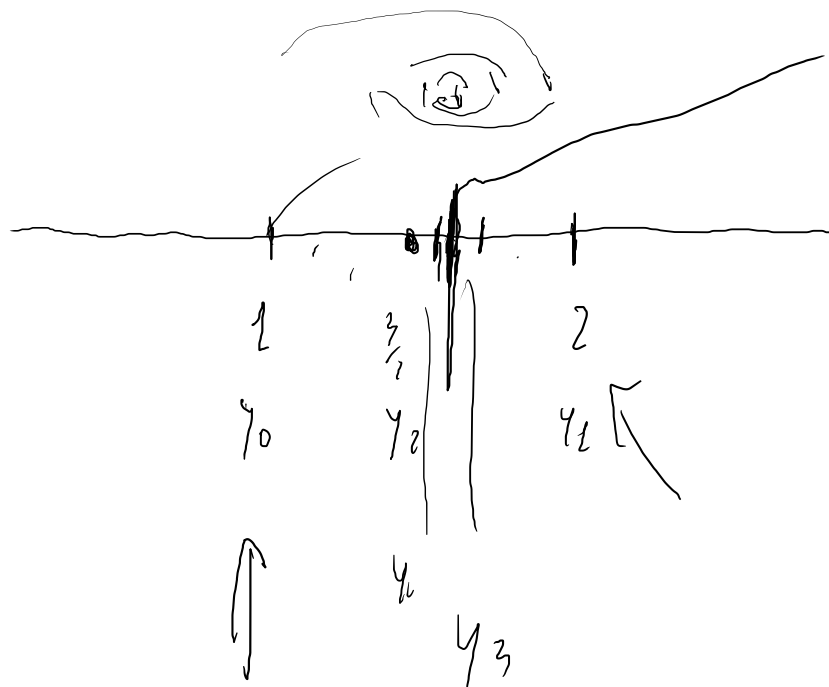
$$Y_{n+1} = \frac{X_{n+2}}{X_{n+1}}$$

$$Y_0 = 1 \quad Y_1 = 2 \quad Y_2 = \frac{3}{2} \quad Y_3 = \frac{5}{3} \quad Y_4 = \frac{8}{5}$$

$$= \frac{X_n + X_{n+1}}{X_{n+1}} = 1 + \frac{X_n}{X_{n+1}} = 1 + \frac{1}{Y_n}$$

Non è definitivamente monotona!

$$\begin{cases} Y_{n+1} = 1 + \frac{1}{Y_n} \\ Y_0 = 1 \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \phi$$

ϕ
37

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n} \rightarrow \phi$$

per n grande y_n è prossimo
un valore ϕ

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Numero d'oro

Mostriamo che $(y_n)_n$ è limitata

$$\min y_n = 1$$

$$\max y_n = 2$$

$$\parallel$$
$$y_0$$

$$\parallel$$
$$y_1$$

$$1 \leq y_n \leq 2 \quad \text{per induzione}$$

$$\text{vero se } n=0, n=1$$

Supponiamo vero per $n \leadsto$ proviamo che è vero per $n+1$

$$1 \leq y_n \leq 2 \quad \leadsto \quad \overset{?}{1} \leq \overset{?}{y_{n+1}} \leq \overset{?}{2}$$

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n} \geq 1 \quad \text{OK}$$

$\uparrow$
SO

$$y_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{y_n} \leq 1$$

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n} \leq 1 + 1 = 2$$

(OK)

molte n $y_n < \phi$ in $h.o.$ $y_{n+1} > \phi$

n $y_n > \phi$ in $h.o.$ $y_{n+1} < \phi$



per $\forall k \in \mathbb{N}$ $k \leq n$ vediamo per $n+1$

se $y_{n+1} < \phi$ proviamo che $y_{n+2} > \phi$

$$y_{n+2} = 1 + \frac{1}{y_{n+1}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\phi} = \phi //$$

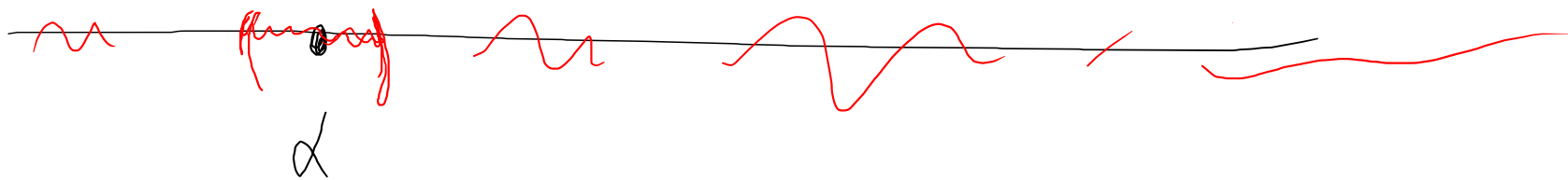
$$y_{n+1} < \phi \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}} > \frac{1}{\phi}$$

si $y_{n+1} > \phi$ allora

$$y_{n+2} = 1 + \frac{1}{y_{n+1}} < 1 + \frac{1}{\phi} = \phi //$$

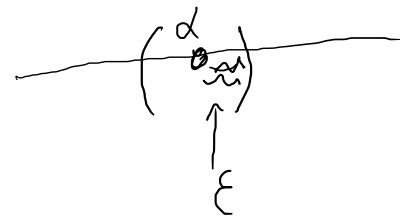
Definizione (Limite di una successione)

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Diciamo **intorno** di α un qualunque insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ tale che esiste $\pi > 0$ e $\underbrace{B(\alpha, \pi)}_{\parallel} \subset U$,
$$] \alpha - \pi, \alpha + \pi [$$



Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali; $\alpha \in \mathbb{R}$; diremo che la successione $(x_n)_n$ converge ad α o che il limite per n che tende a $+\infty$ di x_n è α (scriviamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$) se

Def. degli intorni: Per ogni intorno U di α la successione $(x_n)_n$ è definitivamente in U .



Def. tecnico: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n > n_\varepsilon \quad \boxed{\alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon} \quad \rightarrow \quad \boxed{|x_n - \alpha| < \varepsilon}$$



α

(α, β)

(τ)

$\text{Zu: } X_n = \frac{n}{n^2+1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \geq n_\varepsilon$

$$\left| \frac{n}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$$

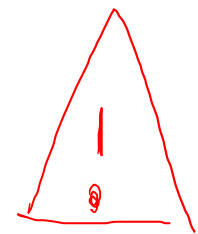
$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n} \times \varepsilon$$

$$\frac{n^2}{n^2+1} < 1$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$



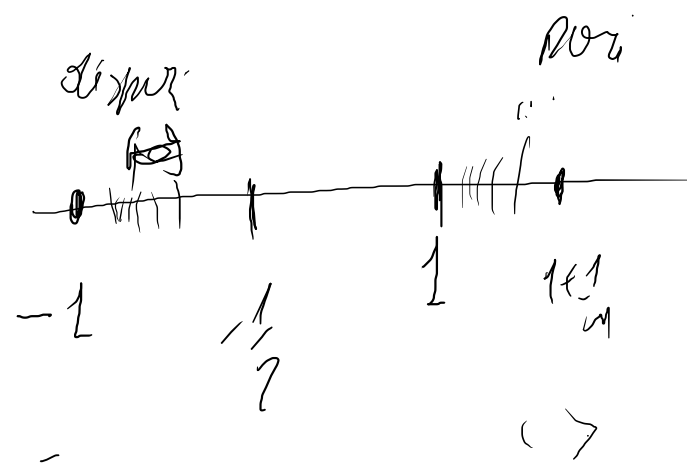
Una successione limitata può non essere convergente

es: $X_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

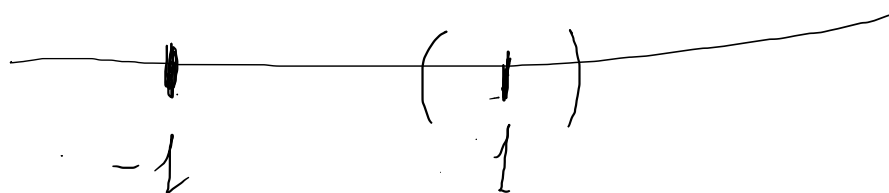
$$|X_n| \leq 2 \quad \forall n$$

$(X_n)_n$ è una successione limitata.

Però non esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$



$$X_n = (-1)^n$$



Teorema di limitatezza delle successioni convergenti.

Ogni successione convergente è limitata. [Non è vero il viceversa!]

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$\forall \epsilon > 0$

$$|x_n - d| < \epsilon$$

$$|x_n| < |d| + \epsilon$$

Dim

Sia $(x_n)_n$ convergente. Allora esiste $d \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = d$.

Vogliamo provare che esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq M$.

Fissiamo $\epsilon = 5$ esiste n_ϵ tale che $\forall n \geq n_\epsilon$

$$|x_n - d| < 5 \quad \text{quindi} \quad |x_n| < |d| + 5$$

Se prendo $M_0 = |d| + 5$ si ha che

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad |x_n| < M_0$$

Prendiamo $M = \max \{ |x_0|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_\epsilon}|, M_0 \}$

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M$

Definizione Successione divergente a $-\infty$ o $+\infty$,

Una successione $(x_n)_n$ si dice divergente a $+\infty$ o che la limite $+\infty$ per n che tende a $+\infty$, e scriviamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ se

1) è definitivamente ~~minore~~ maggiore di ogni numero reale;

equivalentemente

2) [def. (equiv)] se $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_M$

$$x_n > M.$$

<

Es: $(x_n)_n$ Fibonacci $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

$$X_{n+2} = X_n + X_{n+1}$$

$$X_n \geq 2 \quad \forall n \geq 2$$

$$\forall n \geq 2 \quad X_n \geq n \quad n=2 \text{ verw}$$

verw per $n \rightarrow$ verw per $n+1$

$$X_{n+2} = X_{n-1} + X_n \geq n+1 //$$

$\uparrow$
 ≥ 1

$\nwarrow$
 $\geq n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$$

Preso $M \in \mathbb{R}$ devo trovare $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_M$ si ha $X_n > M$

$$\forall n \geq 2 \quad X_n \geq n > M$$

$$\uparrow \text{ prendo } n_M > M \quad (\text{Archimede}) \quad n \geq n_M \quad n > M //$$

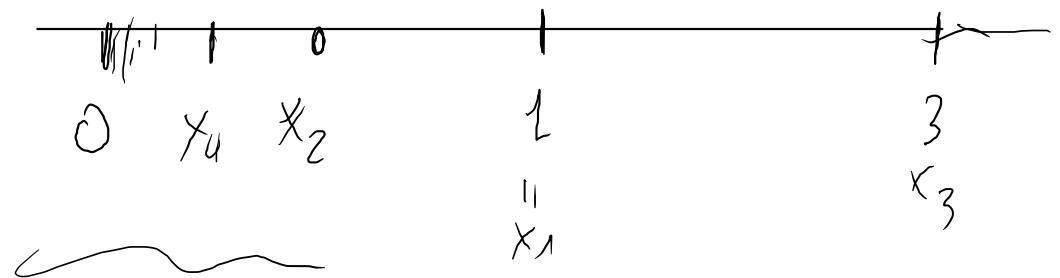
Oss: Ogni successione divergente è illimitata

Però NON è vero che ogni successione illimitata è divergente!

Es: $X_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\cos(n\pi)} \quad n \geq 1$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$X_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$



Diciamo che $U \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di $+\infty$ se esiste $K \in \mathbb{R}$

tale che $]K, +\infty[\subset U$;

$U \subseteq \mathbb{R}$ è intorno di $-\infty$ se esiste $K \in \mathbb{R}$

tale che $]-\infty, K[\subset U$.

Definizione generale di limite

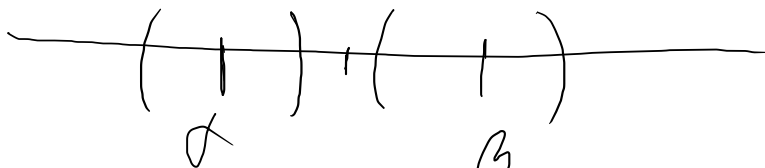
Si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se

per ogni intorno U di α , definitivamente $x_n \in U$.

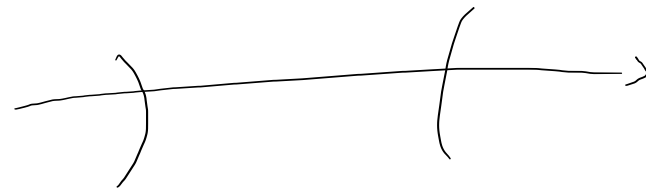
Proprietà degli intervalli

Proprietà di ^{separazione} Hausdorff: siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; allora
 esistono un intervallo U_1 di α e un intervallo U_2 di β tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

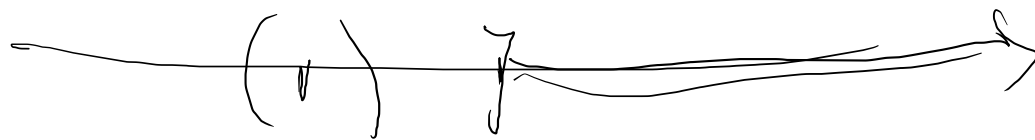
Dim $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



$$U_1 = B\left(\alpha, \frac{1}{4} |\alpha - \beta|\right) \quad U_2 = B\left(\beta, \frac{1}{4} |\alpha - \beta|\right)$$



$\alpha \in \mathbb{R} \quad \beta = +\infty$



$$U_\alpha = B(\alpha, \varepsilon) \quad U_\infty =]\alpha + \varepsilon, +\infty[$$

Teorema di unicità del limite

Sio $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \alpha$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

Allora $\alpha = \beta$.

Dim Siano U_1 e U_2 intorno di α e β $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Allora definitivamente $X_n \in U_1$ e $X_n \in U_2$ impossibile,

