Spazi metrici

Def Sia X un insieme e $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che d è una distanza (o metrica) su X se valgono le seguenti proprietà:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (non degenere)
2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria)
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare)

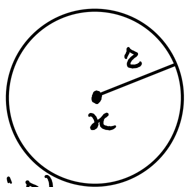
$\forall\, x,y,z \in X$.

OSS $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2\,d(x,y)$
$\Rightarrow d(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$.

Def Uno spazio metrico è un insieme X munito di una funzione distanza $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Def Sia (X,d) spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$. Chiameremo boccia aperta di centro x e raggio r il sottoinsieme

$$B(x;r) := \{ y \in X \mid d(x,y) < r \} \subset X$$



$B(x;r)$

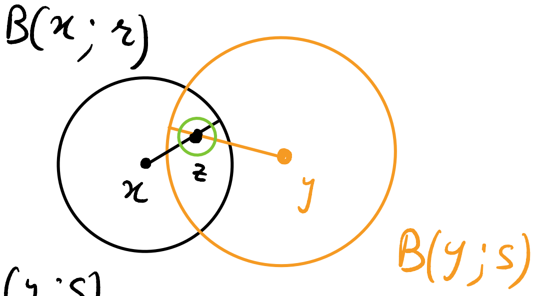
Teorema Sia (X,d) uno spazio metrico. La famiglia delle bocce aperte

$$\mathcal{B} = \{ B(x;r) \mid x \in X,\ r > 0 \}$$

è base per una topologia $\mathcal{T}_d$, detta <u>topologia indotta da d</u>.

Dim 1) $x \in B(x;r) \implies \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

2) Sia $z \in B(x;r) \cap B(y;s)$



$$\varepsilon = \min\left(r - d(x,z),\ s - d(y,z)\right) > 0$$

Mostriamo che $B(z;\varepsilon) \subset B(x;r) \cap B(y;s)$

Sia $u \in B(z;\varepsilon) \rightsquigarrow$

$$d(x,u) \leq d(x,z) + d(z,u) < d(x,z) + \varepsilon \leq$$
$$\leq d(x,z) + r - d(x,z) = r \implies u \in B(x;r)$$

Analogamente $u \in B(y;s)$

Quindi $u \in B(x;r) \cap B(y;s)$, che conclude la dimostr.

Esempi 1) X insieme qualunque, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è una distanza che induce la topologia discreta (d è detta <u>distanza discreta</u> su X). $\boxed{E}$

2) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$

è la distanza Euclidea e induce la topologia Euclidea vista prima.

3) Più in generale su $\mathbb{R}^n$ consideriamo la distanza Euclidea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \| x - y \| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Che d sia una distanza su $\mathbb{R}^n$ è stato dimostrato in Geometria 1.

La topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta da d è detta <u>Topologia Euclidea</u>

4) Distanza Euclidea su $\mathbb{C}^n$

$$d(x,y) = \| x-y \| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$

$\rightsquigarrow$ topologia Euclidea su $\mathbb{C}^n$.

Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso

Def Una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ è detta <u>norma</u> se:

1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_V$ (non degenere)
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (omogenea)
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare)

Uno <u>spazio normato</u> è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) munito di una norma.

<u>OSS</u> • $\|0_V\| = \|0 \cdot 0_V\| = 0 \, \|0_V\| = 0$ (inversa di 1)

• $0 = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$.

<u>Esempio</u> $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ sono spazi normati con la <u>norma Euclidea</u>

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Una norma $\|\cdot\|$ su V induce una distanza su V

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) \overset{def}{=} \|x - y\|$$

<u>OSS</u> La distanza Euclidea su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{C}^n$ è indotta dalla norma Euclidea.

<u>Esempio</u> Su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{C}^n$ definiamo per $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_1 \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

e $$\|x\|_\infty \overset{def}{=} \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

Si vede facilmente che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ $\rightsquigarrow$ d_1 e d_∞ distanze indotte.

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$$

Prop (X, d) spazio metrico. $U \subset X$ aperto $\Longleftrightarrow$
$\forall x \in U \ \exists\, r > 0$ t.c. $B(x; r) \subset U$.

La dimostrazione è immediata.

Def Uno spazio topologico X è detto metrizzabile se $\exists\, d : X \times X \to \mathbb{R}$ distanza che induce la topologia di X.

Esempio
- $\mathbb{R}^n$ con la topologia Euclidea è metrizzabile
- X discreto $\Rightarrow$ X metrizzabile.
- X banale e $\# X \geq 2$ $\Longrightarrow$ X non metrizzabile $\boxed{E}$

Sottospazi topologici

Teorema Sia X spazio topologico e $A \subset X$ sottoinsieme. La famiglia $\mathcal{T}_A := \{ U \cap A \mid U \subset X \text{ aperto} \}$ è una topologia su A, detta topologia indotta da X.

Quindi $V \subset A$ è aperto in $A \Longleftrightarrow \exists\, U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap A$. V è detto aperto relativo.

Dim 1) $\emptyset = \emptyset \cap A$ e $A = X \cap A \in \mathcal{T}_A$

2) $V_i \in \mathcal{T}_A$, $i \in I \Rightarrow \exists\, U_i \subset X$ aperto $\forall i \in I$ t.c.

$$V_i = U_i \cap A \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) =$$

$$= \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap A \in \mathcal{T}_A$$

3) $V, V' \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists\, U, U' \subset X$ aperti t.c.

$V = U \cap A$, $V' = U' \cap A \Rightarrow$

$V \cap V' = (U \cap A) \cap (U' \cap A) = (U \cap U') \cap A \in \mathcal{T}_A$.

Def $A \subset X$ con la topologia $\mathcal{T}_A$ indotta da X è detto sottospazio (topologico) di X.

Esempi 1) $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

è detta n-sfera (o sfera n-dimensionale)

S^n ha equazione

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$$

$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ si chiama anche circonferenza

$S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ è discreto.

2) $B^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$

n-boccia (o boccia n-dimensionale)

$B^0 = \{0\}$

$B^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$

Spesso B^n è denotato con D^n (n-disco)