Lezione 27 settembre

lunedì 27 settembre 2021 14:54

MATRICI

Fissiamo $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, e sia $\mathbb{K}$ un campo (ad. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$)

Def. Una MATRICE A COEFFICIENTI in $\mathbb{K}$

(oppure A ENTRATE in $\mathbb{K}$) di tipo $m \times n$

è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

seconda riga $A_{(2)}$

$a_{ij} \in \mathbb{K}$ $\forall\ i = 1, \dots, m$ e $\forall\ j = 1, \dots, n$.

es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0.5 \\ \pi & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Scriveremo anche $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

L'elemento a_{ij} di posto (i,j) si indicherà

anche $(A)_{ij}$

Per ogni $i = 1, \dots, m$, denotiamo con

$A_{(i)}$ la i-esima RIGA DI A

$A_{(i)} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ è una matrice di tipo $1 \times n$

per ogni $j = 1, \dots, n$, denotiamo con

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ la j-ESIMA COLONNA DI A

è una matrice di tipo $m \times 1$

Def.: l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ a coeff. in $\mathbb{K}$ verrà indicato con

$$M_{m,n}(\mathbb{K})$$

Def. se $m=n$, una $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ si dice

MATRICE QUADRATA

invece di $M_{n,n}(\mathbb{K})$ scrivo $M_n(\mathbb{K})$

Es.: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & \pi & 3 \\ -1 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

∼ · ∼ · ∼

Vogliamo definire 2 operazioni $+$ e $\cdot$ per scalari in modo che $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sia uno $\mathbb{K}$-spazio vettoriale

Def. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$,

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

e sia $c \in \mathbb{K}$

La SOMMA $A+B$ è la matrice il cui coeff. di posto ij è $a_{ij} + b_{ij}$, cioè:

$$A+B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$(A+B)_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

Il PRODOTTO $c \cdot A$ è la matrice il cui coeff. di posto ij è $c \cdot a_{ij}$, cioè

$$c \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$(c \cdot A)_{ij} := c \cdot a_{ij}$$

PROP.: L'insieme $M_{m,n}(\mathbb{K})$ con $+$ e $\cdot$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

verifica per esercizio.

Matrice nulla: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Matrice opposta: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo visto $\mathbb{K}^n = \{n\text{-uple di elementi di } \mathbb{K}\}$

sp. vett. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$

$$c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c\, x_n \end{pmatrix}$$

Possiamo identificare $\mathbb{K}^n$ con le matrici $M_{n,1}(\mathbb{K})$ è facile verificare che le operazioni $+$ e $\cdot$ in $\mathbb{K}^n$ e $M_{n,1}(\mathbb{K})$ coincidono.

Def.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La TRASPOSTA di A è una matrice di tipo $n \times m$, le cui righe sono le colonne di A

$${}^{t}A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

Prop.: ${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$

Dim. $\left({}^{t}(A+B)\right)_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ $=$

$\left({}^{t}A + {}^{t}B\right)_{ij} = ({}^{t}A)_{ij} + ({}^{t}B)_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$

Es.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, ${}^{t}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

2×3 $\qquad$ 3×2

Def: Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice QUADRATA.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la DIAGONALE PRINCIPALE è formata dai coeff. del tipo a_{ii}

Inoltre A si dice:

① MATRICE DIAGONALE se

$$a_{ij} = 0 \quad \forall\ i \neq j$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & - & - & 0 \\ & * & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & * \\ 0 & - & - & 0 & \end{pmatrix}$$

es.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

invece $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ NON è matrice diagonale

② A si dice SIMMETRICA se è simmetrica rispetto alla diagonale principale:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & & \vdots \\ a_{13} & & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cioè: $(A)_{ij} = (A)_{ji}$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

ovvero: ${}^tA = A$

③ MATRICE UNITÀ

$$\mathbb{I}_n \in M_n(\mathbb{K})$$

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero $(\mathbb{I}_n)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

SIMBOLO DI KRONECKER: δ_{ij}

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$