Lezione 30 settembre 2021

giovedì 30 settembre 2021 11:17

Ricordiamo: $A \in M_n(\mathbb{K})$, si dice invertibile se $\exists\ M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che

$$\circledast \quad A \cdot M = M \cdot A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ:

① Se A è invertibile, allora M che verifica $\circledast$ è UNICA.
Tale matrice M si chiama MATRICE INVERSA di A, e si indica con

$$M =: A^{-1}$$

② Se A è invertibile e M è una matrice t.c. $M \cdot A = I_n$

$\Rightarrow$ vale anche $A \cdot M = I_n$

(e anche viceversa: se A è invertib. e M t.c. $A \cdot M = I_n \Rightarrow$ vale anche $M \cdot A = I_n$)

③ Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ entrambe invertibili, allora anche $A \cdot B \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile, e si ha

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Dim.: ① Sia $N \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. valga

$$N \cdot A = A \cdot N = I_n \qquad (**)$$

Ricordo: $N \cdot I_n = N$

quindi

$$N \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. martedì}}}{=} N \cdot \underbrace{I_n}_{} \overset{\circledast}{=} N \cdot (\underbrace{A \cdot M}_{}) \overset{\substack{\text{per le Prop. martedì} \\ \text{associatività} \\ \downarrow}}{=} \underbrace{(N \cdot A)}_{} \cdot M \overset{(**)}{=} \underbrace{I_n}_{} \cdot M \overset{\substack{\text{Prop. martedì} \\ \downarrow}}{=} M$$

quindi M è unica.

② A invertibile, quindi $\exists$ inversa A^{-1}

poi abbiamo M t.c. $\boxed{M \cdot A = \mathbb{I}_n}$

$$\boxed{A \cdot M} \overset{\text{Prop}}{=} A \cdot M \cdot \underbrace{\mathbb{I}_n} = A \cdot M \cdot (\underbrace{A \cdot A^{-1}}) =$$

$$\overset{\text{associatività}}{=} A \cdot \overbrace{(M \cdot A)}^{= \mathbb{I}_n \text{ per ipotesi}} \cdot A^{-1} = \underbrace{A \cdot \mathbb{I}_n}_{=A} \cdot A^{-1} =$$

$$= A \cdot A^{-1} = \boxed{\mathbb{I}_n}$$

③ $$\underbrace{(A \cdot B)}_{= C} \cdot \underbrace{\overbrace{(B^{-1} \cdot A^{-1})}^{M}}_{\underset{?}{=} (A \cdot B)^{-1}} \overset{\text{associativa}}{=} A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{= \mathbb{I}_n} \cdot A^{-1} = A \cdot \mathbb{I}_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

devo dimostrare $C \cdot M = \mathbb{I}_n$

$M \cdot C = \mathbb{I}_n$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) \overset{\text{associative}}{=} B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot \mathbb{I}_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = \mathbb{I}_n$$

OSSERVAZIONI SUL PROD. RIGA × COLONNA

Data $A \in M_n(\mathbb{K})$, possiamo cons.

$$A \cdot A =: A^2$$

Ci sono matrici non nulle il cui quadrato è nullo!

Es. $A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Def.: $A^k := \underbrace{A\cdot A\cdot \cdots \cdot A}_{k\text{-volte}}$

$\forall k \in \mathbb{N}$

e una matrice A si dice NILPOTENTE se una sua potenza è la matrice nulla:

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } A^k = \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\\0&\cdots&0\end{pmatrix} = 0$$

Es.: $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = A$

Si ha $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

in generale: $A = \begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$ hanno la proprietà $A^3 = 0$

Lemma: Se A è nilpotente, allora A NON è invertibile.

Dim. Per assurdo: Supp. A sia invertibile,

$\exists\, A^{-1} : A\cdot A^{-1} = I_n = A^{-1}\cdot A = I_n$

A nilpotente: $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c.

$A^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$; moltiplico a destra i due membri per A^{-1}:

$$A^k \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

oss. : $\forall$ matrice M, $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$0 \cdot m_{11} + 0 \cdot m_{21} + \cdots + 0 \cdot m_{n1}$$

$$A^k \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}}$$

$$\underbrace{A \cdot A \cdots (A}_{k \text{ volte}} \cdot \underbrace{A^{-1})}_{= \mathbb{I}_n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

associativo: $A^{k-1} \cdot \mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

riapplico A^{-1} :

$$A^{k-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

$$\underbrace{A \cdots A \cdot A}_{k-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{k-2} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ricorsivamente, trovo $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

questo è un assurdo, ho supposto A nilpotente e

A invertibile

Infatti, la matrice nulla non è invertibile:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}\cdot M}_{\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}} = \underbrace{M\cdot\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}} \overset{?}{=} I_n$$

$$\neq I_n$$

Oss I_n : è invertibile e si ha:

$I_n^{-1} = I_n$, infatti:

$I_n \cdot I_n = I_n$

∼ · ∼ · ∼ · ∼ ·

Vedremo ora la Teoria dei Sistemi Lineari;

punto della situazione :

GEOMETRIA NEGLI SPAZI VETTORIALI :

MATRICI

↓

SOTTOSPAZI VETTORIALI ⟵ EQUAZIONI ⟷ SISTEMI LINEARI

SISTEMI LINEARI :

Def. : Un SISTEMA LINEARE di m equazioni in n incognite è un insieme finito di equazioni del tipo :

$$(***)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sono i COEFFICIENTI , $x_1, \dots, x_n$ INCOGNITE e $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ si chiamano TERMINI NOTI.

Def.: Una SOLUZIONE del sistema (***) è

una n-upla $(s_1, s_2, .., s_n) \in K^n$ tale che sostituendo s_i ad x_i $\forall i = 1, .., n$, tutte le equazioni di (***) sono soddisfatte.

Def. Se (***) ha almeno una soluzione, allora si dice COMPATIBIE; se (***) non ammette nessuna soluzione, si dice INCOMPAT. o IMPOSSIBILE.

Esempi: ①
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

$m = 2$, $n = 2$ è un SIST. INCOMPATIB.

②
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$
è COMPAT.

$(s_1, s_2) = (-1/2, 1/2)$ ed è l'unica soluzione

③
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow$$
$x_1 = x_2 + 3$; pongo $x_2 = c_2$

è COMPAT. $x_1 = c_2 + 3$

ma ha infinite soluzioni: $(s_1, s_2) = (c_2 + 3, c_2)$

$\forall c_2 \in K$, trovo una soluzione

se K è un campo infinito, allora le soluzioni sono INFINITE.

La teoria verrà sviluppata con l'uso delle matrici:

Dato (***), gli possiamo associare 3 matrici

$$\boxed{***}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

di tipo $m \times n$ (# righe = # equazioni
# colonne = # incognite)

A si dice MATRICE DEI COEFFICIENTI

possiamo cons. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ VETTORE DEI TERMINI NOTI

Cons. anche FORMALMENTE il

VETTORE DELLE INCOGNITE:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Con queste scelte, $\boxed{***}$ si può riscrivere in forma matriciale

$$A \underset{\substack{\downarrow \\ \text{prodotto righe} \times \text{colonne}}}{\cdot} X = b$$