Lezione 1 ottobre 2021

venerdì 1 ottobre 2021 10:58

SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$ vettore dei termini noti

matrice $m \times 1$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ vettore delle incognite

matrice di tipo $n \times 1$

$$\underbrace{\underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{X}_{n \times 1}}_{m \times 1} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

quindi: $\boxed{A \cdot X = b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \overset{=}{\Updownarrow} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

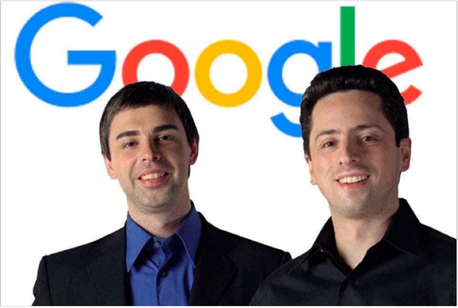
Def.: Se $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, allora $A \cdot X = 0$

si chiama SISTEMA LINEARE OMOGENEO

SLO.

Se $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, scriveremo SL.

PAGE RANK



2000 : Fondato GOOGLE da LARRY PAGE (informatico)
e SERGEJ BRIN (matematico)

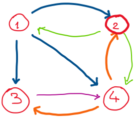
PROBLEMA: CLASSIFICARE LE PAGINE DELLA RETE DA ESIBIRE TRAMITE MOTORE DI RICERCA

PARTENZA: Importanza di una pagina dipende dal # (numero) di pagine importanti che puntano ad essa.

- Inoltre: l'import. di una pagina si trasferisce in parti uguali alle pagine a cui punta

- Import. di pagina = somma delle frazioni di importanza che le derivano dalle pagine che ad essa puntano

ES. 4 pagine:



Definiamo $H \in M_4(\mathbb{R})$ tale che

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \text{ link dalla pagina } i \text{ alla } j \\ 0 & \text{se } \nexists \text{ link dalla } i \text{ alla } j \end{cases}$$

$h_{11} = 0,\ h_{12} = 1,\ h_{13} = 1,\ h_{14} = 1$

$h_{21} = 1,\ h_{22} = 0,\ h_{23} = 0,\ h_{24} = 1$

$h_{31} = 0,\ h_{32} = 0,\ h_{33} = 0,\ h_{34} = 1$

$h_{41} = 0,\ h_{42} = 1,\ h_{43} = 1,\ h_{44} = 0$

MATRICE DI ADIACENZA

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r_4 = 2$$

La somma delle entrate di H in ogni riga i = # link che partono dalla pagina i $= r_i$

Indichiamo con x_j l'import. della pagina j

$$\circledast \quad x_j = h_{1j}\frac{x_1}{r_1} + h_{2j}\frac{x_2}{r_2} + h_{3j}\frac{x_3}{r_3} + h_{4j}\frac{x_4}{r_4}$$

$\forall \quad j = 1, 2, 3, 4$

Nel nostro caso

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{2} \\ x_2 = 1 \cdot \dfrac{x_1}{3} + 1 \cdot \dfrac{x_4}{2} \\ x_3 = 1 \cdot \dfrac{x_1}{3} + 1 \cdot \dfrac{x_4}{2} \\ x_4 = 1 \cdot \dfrac{x_1}{3} + 1 \cdot \dfrac{x_2}{2} + 1 \cdot \dfrac{x_3}{1} \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} -x_1 + \dfrac{x_2}{2} = 0 \\ \dfrac{x_1}{3} - x_2 + \dfrac{x_4}{2} = 0 \\ \dfrac{x_1}{3} - x_3 + \dfrac{x_4}{2} = 0 \\ \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{2} + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\grave{A} \cdot X = 0$$

è un SLO

Spesso, il SLO associato a H ammette solo la soluzione nulla $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, 0, 0)$, non è significativa per noi.

Page & Brin hanno introdotto un fattore correttivo:

si fissa una costante d: $0 < d < 1$ e modifichiamo l'equazione $*$:

$$x_j = d \left(h_{1j} \frac{x_1}{r_1} + h_{2j} \frac{x_2}{r_2} + h_{3j} \frac{x_3}{r_3} + h_{4j} \frac{x_4}{r_4} \right) + \frac{1}{4} (1-d)$$

SOLITAMENTE si pone $d = 0.85$

Esercizio: Riscrivere il SL. (non sarà omogeneo) e la matrice dei coefficienti

~ · ~ · ~ · ~ · ~

Cons. ora il problema della compatibilità di SL e delle loro soluzioni.

Vediamo un primo risultato in questa direzione:

TEOREMA DI CRAMER: Cons. un SL (anche SLO) QUADRATO, cioè di n equazioni in n incognite

$$(**) \quad \underline{A \cdot x = b}, \qquad A \in M_n(\mathbb{K})$$

Supp. che A sia una matrice INVERTIBILE

Allora: $(**)$ è compatibile ed ha un'unica soluzione data da

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \underbrace{\underset{n \times n}{A^{-1}} \cdot \underset{n \times 1}{b}}_{n \times 1}$$

Dim.: Dimostro che $s = A^{-1} \cdot b$ è una soluzione di $(**)$:

$$A \cdot X = b,$$ cioè devo verificare che

vale: $\boxed{A \cdot s = b}$, $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

infatti:
$$A \cdot s = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}s_1 + \cdots + a_{1n}s_n \\ \vdots \\ a_{n1}s_1 + \cdots + a_{nn}s_n \end{pmatrix}$$

quindi sostituire $s_1, s_2, \dots, s_n$ alle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ equivale a sostituire la matrice $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ alla colonna delle incognite $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Abbiamo:

$$A \cdot s = A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b$$

$\Longrightarrow$ s è soluzione di $(**)$

Dimostriamo ora che s è l'unica soluzione:

Sia $s' = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix}$ un'altra soluzione di $(**)$

quindi: $$A \cdot s' = b \quad (*)$$

per ipotesi, A è invertibile, quindi posso moltiplicare i 2 membri di ⊛ per A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot s') = A^{-1}\cdot b$$

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot s' = A^{-1}\cdot b$$

$$I_n\cdot s' = A^{-1}\cdot b$$

$$s' = A^{-1}\cdot b = s$$

OSS. Per il momento non sappiamo calcolare A^{-1}, ma in seguito vedremo 2 modi, e ci permetterà di enunciare la FORMULA DI CRAMER: come calcolare s_i.

Ricordiamo un esempio:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio: dimostrare che A è invertibile.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$