Lezione 5 ottobre 2021

martedì 5 ottobre 2021 11:13

Pb.: Trovare le soluzioni di un SL

Cons. prima dei SL semplici, quelli con matrice dei coefficienti A SCALA.

Def. Cons. matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia r il numero di righe non nulle, $0 \le r \le m$. Allora A si dice A SCALA (A GRADINI) se valgono:

① $r = 0$, oppure $r > 0$ e le righe non nulle sono $A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(r)}$

(mentre $A_{(k)} = (0\ 0 \cdots 0)$ $\forall\, k = r+1, \dots, m$)

② $\forall\, i \in \{1, \dots, r\}$, poniamo

$$j_i := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$$

allora vale $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

In questo caso, gli elementi $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ si chiamano ELEMENTI PIVOT DELLA MATRICE A SCALA.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & \enclose{circle}{3} & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \enclose{circle}{1} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \enclose{circle}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,7}(\mathbb{R})$

$r = \#$ righe non nulle $= 3$, e le righe non nulle sono $A_{(1)}$, $A_{(2)}$ e $A_{(3)}$. $\Rightarrow$ ① è verificata

$j_1 = \min\{j : a_{1j} \neq 0\} = \min\{\underset{a_{12} \neq 0}{2}, \overset{a_{14} \neq 0}{4}, \underset{a_{15} \neq 0}{5}, \overset{a_{17} \neq 0}{7}\} = 2$

$j_2 = 3$, perché nella colonna 3 si presente il primo elemento $\neq 0$ della 2ª riga

$j_3 = 6$, perché $a_{36} \neq 0$, e $a_{3j} = 0$ $\forall\, j \le 5$

vale $j_1 < j_2 < j_3$

$2 < 3 < 6$ ② ok

$\Rightarrow$ la matrice A è a scala.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$r = 3$, ma le righe non nulle non sono le prime 3 $\Longrightarrow$ NON è a scala

Altro esempio:

gradino "troppo alto"

$j_1 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{3} & 0 & 4 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \textcircled{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,7}(\mathbb{R})$$

$j_3 = 1$

$j_2 = 2$

$\Longrightarrow$ NON è a scala $\qquad 2 < 2 < 1$ NO

Esempio: Matrici diagonali

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

è diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON è scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonale ed è a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonale

non è a scala

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$ e le prime due righe non nulle $\Rightarrow$ è a scala

$j_1 = 1$, $\quad j_2 = 2$

In generale, una matrice diagonale con r righe non nulle è a scala $\Longleftrightarrow$ sono non nulli i primi r elementi della diagonale $d_{11} \neq 0$, $d_{22} \neq 0$, $\dots$, $d_{rr} \neq 0$, e $d_{ii} = 0$ $\forall i > r$.

PROP.: Sia $A \cdot X = b$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $r = \#$ righe non nulle. Supponiamo che A sia a scala.

Allora il SL $A \cdot x = b$ è compatibile $\Longleftrightarrow$ $b_{r+1} = \dots = b_m = 0$

Dim: $\Longrightarrow$: Supp. $A \cdot x = b$ sia compatibile. Allora $\exists$ una soluzione $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ t.c.

$A \cdot s = b$; siccome A a scala, le ultime $m - r$ righe sono nulle quindi in corrispondenza, le $m - r$ equazioni sono del tipo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_i$

s soluzione, quindi vale

$$0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_n = b_i \quad \forall\, i = r+1, \dots, m$$

$$0 = b_i$$

$\Longleftarrow$: Supponiamo ora $b_i = 0$ $\forall i = r+1, \dots, m$

Consideriamo l'r-esima equazione:

perché pivot

$$\overset{0 \neq}{\boxed{a_{r j_r}}} x_{j_r} + a_{r\, j_r+1} x_{j_r+1} + \dots + a_{rn} x_n = b_r$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{r j_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

posso dividere per $a_{r j_r}$ e scrivo x_{j_r} in funzione delle altre incognite:

$$(*) \quad x_{j_r} = \frac{1}{a_{r j_r}} \left(b_r - a_{r\, j_r+1} x_{j_r+1} - \dots - a_{rn} x_n \right)$$

Fisso dei valori arbitrari per le incognite $x_{j_r+1}, \dots, x_n$:

$x_{j_r+1} = s_{j_r+1} \in \mathbb{K}, \quad \dots, \quad x_n = s_n \in \mathbb{K}$

e sostituisco questi valori in $(*)$

in questo modo trovo un valore s_{j_r} per x_{j_r}.

Cons. ora l'equazione $r-1$:

$$\underset{\neq 0}{\boxed{a_{r-1\, j_{r-1}}}} x_{j_{r-1}} + a_{r-1\, j_{r-1}+1} x_{j_{r-1}+1} + \dots + a_{r-1\, n} x_n = b_{r-1}$$

siccome $j_{r-1} < j_r$

e $a_{r-1\, j_{r-1}} \neq 0$ perché è un pivot,

posso scrivere $x_{j_{r-1}}$ in funzione delle incognite x_j con $j > j_{r-1}$, e tra queste ci sono anche $x_{j_r}, x_{j_r+1}, \dots, x_n$

$$(**) \quad x_{j_{r-1}} = \frac{1}{a_{r-1\, j_{r-1}}} \left(b_{r-1} - a_{r-1\, j_{r-1}+1} x_{j_{r-1}+1} - \dots - a_{r-1\, n} x_n \right)$$

sostituisco in $(**)$ i valori per $x_{j_r}, \dots, x_n$ determinati prima, fissiamo dei valori a piacere per le eventuali incognite $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_{j_r-1}$, e così otteniamo un valore per $x_{j_{r-1}}$.

Procedo così a ritroso, e trovo dei valori $s_1, s_2, \dots, s_n$ per tutte le incognite, in modo che tutte le equazioni siano soddisfatte.

Esempio:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 3 \leftarrow \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

è a scala

$r = 3$

$a_{rj_r} = a_{33} = 1 \neq 0$

$x_3 = 3 + x_4$, $\boxed{x_4 = s_4} \in \mathbb{K}$ fisso a piacere

$s_3 = 3 + s_4$, $\boxed{x_3 = 3 + s_4}$

Cons. la eq. r-1, cioè la seconda $-x_2 + 2x_4 = 1$

$$x_2 = -1 + 2x_4$$

$$x_2 = -1 + 0 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4$$

sostituisco i valori trovati

$x_2 = -1 + 2s_4 \Rightarrow$ ho trovato $s_2 = -1 + 2s_4$

Infine, cons. la prima equazione

$$\boxed{2}\,x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(0 - x_2 + x_3)$$

sostituisco i valori trovati prima

$x_1 = \frac{1}{2}(-s_2 + s_3) = \frac{1}{2}(1 - 2s_4 + s_3)$, $s_3 = 3 + s_4$

$\Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}(+1 - 2s_4 + s_3)$

$$= \frac{1}{2}(1 - 2s_4 + 3 + s_4) = \frac{1}{2}(4 - s_4)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} s_4$$

$$\Longrightarrow \text{soluzione} \quad s = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} s_4 \\ -1 + 2 s_4 \\ 3 + s_4 \\ 0 + s_4 \end{pmatrix}$$

in questo modo, al variare di $s_4 \in \mathbb{K}$, troviamo TUTTE LE SOLUZIONI DEL SL

ad. es. per $s_4 = 0$: $\quad \tilde{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

oss. che $\quad s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} s_4 \\ 2 s_4 \\ s_4 \\ s_4 \end{pmatrix} = \tilde{s} + \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} s_4 \\ 2 s_4 \\ s_4 \\ s_4 \end{pmatrix}}$

al variare di s_4, sono le soluzioni so

di $A \cdot X = 0$.