Lezione 7 ottobre 2021

giovedì 7 ottobre 2021 10:42

OPERAZIONI ELEMENTARI SU SL

Def.: Due sistemi lineari sono EQUIVALENTI se i loro insiemi di soluzioni coincidono.

oss.: $A \cdot X = b$ e $A' \cdot X = b'$ possono essere equivalenti, pur avendo un # diverso di equazioni.
(↳ numero)

Ad es:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases} \qquad 2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R})$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b' = (1)$$

sono equivalenti; infatti, osservo che
$$4x_1 + 6x_2 - 2 = \underbrace{2}_{\neq 0}(2x_1 + 3x_2 - 1)$$
quindi
$$4x_1 + 6x_2 - 2 = 0 \iff 2x_1 + 3x_2 - 1 = 0$$

OPERAZIONI ELEMENTARI

sulla MATRICE COMPLETA di $A \cdot X = b$

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(K)$$

OE 1 Scambio di due righe di $(A|b)$
(ovvero scambio di due equazioni):

$$(A|b)_{(i)} \longleftrightarrow (A|b)_{(j)}$$

OE 2 MOLTIPLICAZIONE DI UNA RIGA di $(A|b)$ PER UNA COSTANTE NON NULLA
(ovvero: molt. un'equazione per cost. $\neq 0$)

$$(A|b)_{(i)} \longrightarrow c \cdot (A|b)_{(i)}, \quad c \neq 0$$

OE 3 SOSTITUZIONE DI UNA RIGA DI $(A|b)$ CON LA SOMMA DELLA STESSA RIGA E UN

MULTIPLO NON NULLO DI UN'ALTRA RIGA

(ovvero: sost. 1 eq. con la somma ....)

$$(A|b)_{(i)} \longrightarrow (A|b)_{(i)} + c\cdot(A|b)_{(j)}$$

TEOREMA: Le operazioni OE1, OE2 e OE3 trasformano un sistema $A\cdot X = b$ in un sistema $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$ equivalente.

Dim. OE1 & OE2: è facile vedere che l'insieme delle soluzioni non cambia.

Vediamo OE3: Sia s soluzione di $A\cdot X = b$, e voglio dim. che s è soluzione di $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$

$$A\cdot s = b \qquad \begin{cases} \boxed{a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n} = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \dots a_{mn}s_n = b_m \end{cases}$$

si può riscrivere

$$(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n})\cdot\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \dots + a_{1n}s_n$$

$$\boxed{\begin{cases} A_{(1)}\cdot s = b_1 \\ A_{(2)}\cdot s = b_2 \\ \vdots \\ A_{(m)}\cdot s = b_m \end{cases}}$$

Cons. $\tilde{A}\cdot s$, dove $\tilde{A}$ è ottenuta da A con OE3: $(A|b)_{(i)} \longrightarrow (A|b)_{(i)} + c\cdot(A|b)_{(j)}$

$$\underbrace{\underset{m\times n}{\tilde{A}}\cdot\underset{n\times 1}{s}}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1)}\cdot s \\ \tilde{A}_{(2)}\cdot s \\ \vdots \\ \tilde{A}_{(m)}\cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{(1)}\cdot s \\ \vdots \\ \tilde{A}_{(i)}\cdot s \\ \vdots \\ \tilde{A}_{(j)}\cdot s \\ \vdots \\ \tilde{A}_{(m)}\cdot s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{(1)}\cdot s \\ \vdots \\ A_{(i)}\cdot s + c\cdot A_{(j)}\cdot s \\ \vdots \\ A_{(j)}\cdot s \\ \vdots \\ A_{(m)}\cdot s \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{(i)} = A_{(i)} + c\cdot A_{(j)}$$

$$(\tilde{A}|\tilde{b})_{(i)} = (A|b)_{(i)} + c\cdot(A|b)_{(j)}$$

$=$
$\downarrow$
S soluzione
di $A\cdot X=b$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + c\cdot b_j \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \tilde{b}$$

$\Rightarrow$ se s verifica $A\cdot s = b \Rightarrow \tilde{A}\cdot s = \tilde{b}$

Viceversa: Supp. s soluzione di $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$

$\tilde{A}\cdot s = \tilde{b}$, quindi $\begin{cases} \tilde{A}_{(i)}\cdot s = \tilde{b}_i \\ \tilde{A}_{(j)}\cdot s = \tilde{b}_j \end{cases}$

ma: $\begin{cases} A_{(i)}\cdot s + \cancel{c\cdot \overset{=b_j}{A_{(j)}\cdot s}} = b_i + \cancel{c\cdot b_j} \\ A_{(j)}\cdot s = b_j \end{cases}$

sottraggo dalla prima c volte la seconda, e trovo: $\begin{cases} A_{(i)}\cdot s = b_i \\ A_{(j)}\cdot s = b_j \end{cases}$, e le altre eq. sono soddisfatte perché non sono state modificate.

Abbiamo dimostrato che s è soluzione di $A\cdot X=b$
$\Leftrightarrow$ s è soluzione di $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$.

TEOREMA DI GRADINIZZAZIONE DI GAUSS:

Dato un SL $A\cdot X = b$ ⊛ (eventualm. omogeneo), è sempre possibile trasformare ⊛ in un sistema equivalente $\tilde{A}\cdot X = \tilde{b}$, usando le OE1, OE2 e OE3 e con $\tilde{A}$ a scala.

Dim. Diamo un algoritmo:

- se A è la matrice nulla, ci fermiamo

- supp. A non nulla, e cons. la prima colonna non nulla: $A^{(j)}$

se $a_{1j} \neq 0$, non facciamo nulla, se $a_{1j} = 0$,

sia a_{kj} il primo elemento non nullo, e

faccio $(A|b)_{(1)} \longleftarrow (A|b)_{(k)}$ $\boxed{OE1}$

- dopo un'eventuale scambio, posso supporre che sia $a_{1j} \neq 0$.

Allora applico OE3, e precisamente sommando a ciascuna riga $(A|b)_{(2)}, \dots, (A|b)_{(m)}$ un opportuno multiplo della prima $(A|b)_{(1)}$

in modo che i coefficienti $a_{2j}, \dots, a_{mj}$ diventino zero:

es. $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{OE1}$$

USEREMO LA NOTAZIONE : $\underset{\text{riga 1}}{I} \longleftrightarrow \underset{\text{riga 2}}{II}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & 8 & 1 \end{array}\right)$$

voglio che diventi zero (sotto il primo pivot devo avere solo zeri)

cons. OE3 : $III \rightsquigarrow III - 2 \cdot I$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

$$(A|b)_{(2)} \longrightarrow (A|b)_{(2)} - \frac{a_{2j}}{a_{1j}} (A|b)_{(1)}$$

$$\vdots$$

$$(A|b \ _{(m)} \longrightarrow (A|b)_{(m)} - \frac{a_{mj}}{a_{1j}} (A|b)_{(1)}$$

Ho ottenuto una matrice del tipo

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & \overset{\neq 0}{a_{1j}} & \cdots & & \cdots & b_1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_m \end{array}\right)$$

e riapplico l'algoritmo alla sottomatrice

Con un numero finito di passi, trovo una matrice a scala.

Esempio:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\text{III} - 2\,\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & \overset{\neq 0}{\boxed{1}} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -3 \end{array}\right)$$

↳ deve diventare 0

$$\xrightarrow{\text{III} + 6 \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

i SL corrispondenti:

$$\begin{cases} 2x_2 + 7x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \\ 4x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 7x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \\ 0 = 15 \end{cases}$$

il sistema è incompatibile per un Teorema precedente: $\tilde{A}$ è a scala, $r = 2$ e $\tilde{A}_{(3)} = (0\ 0\ 0)$ ma $b_3 \neq 0$.

Esempio:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \overset{\neq 0}{\boxed{1}} & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{III} - 3\,\text{I} \\ \text{IV} - \text{I}}]{\text{II} - 2\,\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & \overset{\neq 0}{\boxed{1}} & -4 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & -21 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV} - \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & \underset{\neq 0}{\boxed{-9}} & -21 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 8 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV} + \frac{2}{9}\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & -4 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & -21 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10/3 & 4/3 \end{array}\right)$$

In questo caso $r = 4 = m$ e il sistema è compatibile.