Lezione 4 ottobre 2021

lunedì 4 ottobre 2021 14:58

SISTEMI LINEARI

TEOREMA DI STRUTTURA PER LE SOLUZIONI DI SLO

Cons. $A \cdot X = 0$ un sistema lineare omogeneo.

Allora se s e s' sono soluzioni, anche $s+s'$ è soluzione di $A \cdot X = 0$; inoltre, $\forall c \in \mathbb{K}$, si ha $c \cdot s$ è una soluzione di $A \cdot X = 0$.

Oss. $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $s' = \begin{pmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Somma $s+s' = \begin{pmatrix} s_1+s'_1 \\ s_2+s'_2 \\ \vdots \\ s_n+s'_n \end{pmatrix}$

$c \cdot s = \begin{pmatrix} c s_1 \\ c s_2 \\ \vdots \\ c s_n \end{pmatrix}$

Oss. Ricordiamo che $A \cdot X = 0$ ha sempre almeno 1 soluzione, quella nulla:

$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = 0 \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Oss. Ricordiamo Teo. Cramer: $A \cdot X = b$ ⊛

con $A \in M_n(K)$ e invertibile $\Rightarrow$ ⊛ ha 1! soluzione ($\forall\, b$ vettore dei termini noti)

$$s = A^{-1} \cdot b$$

In particolare: se $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, l'unica soluzione è

$$s = A^{-1} \cdot b = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dim. del Teorema di Struttura:

s è soluzione di $A \cdot X = 0 \Rightarrow \boxed{A \cdot s = 0}$

s' è soluzione di $A \cdot X = 0 \Rightarrow \boxed{A \cdot s' = 0}$

voglio dim. che $s+s'$ è soluzione, quindi cons.

$$A \cdot (s+s') \underset{\substack{\downarrow \\ \text{distributività}}}{=} A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

s soluzione $\Rightarrow \boxed{A \cdot s = 0}$ sia $c \in \mathbb{K}$ arbitrario

voglio dim. che $c \cdot s$ è soluzione, quindi cons.

$$A \cdot (c \cdot s) = c \cdot A \cdot s = c \cdot 0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vedremo: in altre parole, l'insieme delle soluzioni di un SLO forma $W \subseteq \mathbb{K}^n$ un SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{K}^n$.

Esempio:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad s' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s + s' = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$3s' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI STRUTTURA PER SOLUZIONI DI SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI:

Cons. $A \cdot X = b$, $b \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, e supp. che sia COMPATIBILE. Sia $\tilde{s}$ una soluzione:

$A \cdot \tilde{s} = b$. Allora: ogni altra soluzione è del tipo $s = \tilde{s} + s_0$, dove s_0 è una soluzione di $A \cdot X = 0$

($A \cdot X = 0$ si dice SLO associato a $A \cdot X = b$)

Dim.: Dimostriamo prima che $\tilde{s} + s_0$ è soluzione di $A\cdot X = b$.

Infatti: $A\cdot(\tilde{s}+s_0) \overset{\overset{\text{distributività}}{\downarrow}}{=} A\cdot\tilde{s} + A\cdot s_0 = b + 0 = b$ ✓

Ora: sia s una soluzione qualunque di $A\cdot X=b$;

osservo: $s = \tilde{s} + \underbrace{(s-\tilde{s})}_{=:\, s_0} = \tilde{s}+s_0$

pongo $s_0 := s-\tilde{s}$

devo dimostrare che s_0 è soluzione di $A\cdot X = 0$

$$A\cdot(s-\tilde{s}) = A\cdot s - A\cdot\tilde{s} = b - b = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = 0$$

Esempio:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$\tilde{s} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, una possibile $s_0 = \begin{pmatrix}1\\-3\\7\\7\end{pmatrix}$ sol. del SLO associato

$\tilde{s}+s_0 = \begin{pmatrix}2\\-2\\8\\8\end{pmatrix}$ è un'altra soluz.

oppure $s_0 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\tilde{s}+s_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$ è soluz.

Domani inizieremo teoria per trovare soluzioni in generale.

* * *

Vediamo alcuni esercizi del 2° foglio:

Es. ⑦:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{è invertibile}$$

$$\Longleftrightarrow \quad d_{11} \cdot d_{22} \cdot \ldots \cdot d_{nn} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} d_{11} \neq 0 \\ d_{22} \neq 0 \\ \vdots \\ d_{nn} \neq 0 \end{cases}$$

e in tal caso

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/d_{nn} \end{pmatrix}$$

D è invertibile $\Longleftrightarrow \exists\, M \in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$D \cdot M = M \cdot D = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & - & 0 \\ 0 & d_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & - & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} m_{11} & d_{11} m_{12} & \cdots & d_{11} m_{1n} \\ d_{22} m_{21} & d_{22} m_{22} & \cdots & d_{22} m_{2n} \\ \vdots & & & \\ d_{nn} m_{n1} & d_{nn} m_{n2} & & d_{nn} m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad d_{11} m_{11} = 1 = d_{22} m_{22} = \cdots = d_{nn} m_{nn}$$

$$\boxed{d_{11} m_{12} = 0} = \cdots = d_{11} m_{1n} = \cdots = d_{nn} m_{n\,n-1}$$

$$d_{11} \cdot m_{11} = 1 \implies d_{11} \neq 0, \quad m_{11} = 1/d_{11}$$

$$d_{22} m_{22} = 1 \implies d_{22} \neq 0, \quad m_{22} = 1/d_{22}$$

$$\vdots$$

$$d_{nn} m_{nn} = 1 \implies d_{nn} \neq 0, \quad m_{nn} = 1/d_{nn}$$

$$\rightarrow \quad d_{11} \neq 0, \implies m_{12} = 0 = m_{ij} \qquad i \neq j$$

Es. ⑧ Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertibile

Allora vale cancellazione :

$$A \cdot B = A \cdot C \implies B = C$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$$

associatività :

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= \mathbb{I}_n} \cdot B = \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= \mathbb{I}_n} \cdot C$$

$$B = C$$

Cons. invece $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; abbiamo visto che A non è invertibile.

$\exists$? $B, C \in M_2(\mathbb{K})$ $B \neq C$ e tali che

$$A \cdot B = A \cdot C \quad ?$$

Un suggerimento: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

altro: $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ancora un sugg.: $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot B = A \cdot C, \quad \text{ma} \quad B \neq C$$

In generale: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} c_{11}+c_{21} & c_{12}+c_{22} \\ c_{11}+c_{21} & c_{12}+c_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot C \iff \begin{cases} b_{11}+b_{21} = c_{11}+c_{21} \\ b_{12}+b_{22} = c_{12}+c_{22} \end{cases}$$

③ A invertibile $\Longrightarrow$ ${}^tA$ è invertibile

$(\exists A^{-1})$ $\qquad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

basta dimostrare che ${}^t(A^{-1}) = M$ verifica

$${}^tA \cdot M = M \cdot {}^tA = I_n$$

$${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1} \cdot A) = {}^tI_n = I_n$$

$${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$