Forma canonica di Jordan

algoritmo ed esempi

Testo di riferimento:

Antsaklis & Michel, "Linear Systems"

capitolo 2

Matrici simili e trasformazione di similitudine per matrici quadrate

Def: date $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

B è simile ad A $B \sim A$ se

$\exists\ T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, rank$(T) = n$ tale che

$$B = T^{-1} A T$$

$$B = T^{-1} A T \Rightarrow A = T B T^{-1}$$

Vale anche che: $A \sim A$

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

$$A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

Matrice asemenea :

$$A \sim B \Longrightarrow A^k \sim B^k \quad k \in \mathbb{Z}, k > 0$$

$\exists\, T :$ rank $T = n$

$$A = TBT^{-1} \Longrightarrow A^k = TB^kT^{-1}$$

Teorema $A \sim B \Rightarrow$ stessi autovalori

$$\lambda_A, \bar{v}_A : \quad A\bar{v}_A = \lambda_A \bar{v}_A \Leftrightarrow (A - \lambda_A I)\bar{v}_A = 0$$

$$A \sim B \rightarrow A = TBT^{-1}$$

$$(TBT^{-1} - \lambda_A T T^{-1})\bar{v}_A = 0$$

$$[T(B - \lambda_A I)T^{-1}]\bar{v}_A = 0$$

$$T^{-1} \cdot \left[T(B - \lambda_A I) T^{-1} \right] \bar{v}_A = 0$$

$$(B - \lambda_A I)\underbrace{\left(T^{-1} v_A \right)}_{\hat{v}_B} = 0$$

$$(B - \lambda_A I)\hat{v}_B = 0 \Leftrightarrow B\hat{v}_B = \lambda_A \hat{v}_B$$

Def A diagonalizzabile

$$A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix}$$

Teorema

se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, autovalori tutti distinti

$\Downarrow$

è diagonalizzabile

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile

$$\Updownarrow$$

A con autovalori tutti distinti $\Longrightarrow$ $\exists$ base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A

$A v_i = \lambda_i v_i$

$$T = \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, v_n \right]$$

$$(\lambda_i, \bar{v}_i)$$

$$A\underbrace{\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n\end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix}\lambda_1\bar{v}_1 & \lambda_2\bar{v}_2 & \cdots & \lambda_n\bar{v}_n\end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$$

$$(T^{-1})\ AT = T\Lambda$$

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

NB $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere diagonalizzabile anche se gli autovalori non sono tutti distinti!

Es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ -1 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad {}_2\lambda_3 = +2$

$$V_1 = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker(A - \lambda_2 I) = \ker\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_2 \to \mu_2 = 2$ ///

$\dim V_2 = 2$ ///

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{Es}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$V_1 = \ker(A - I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

NON diagonalizzabile

$\lambda_2 = 2 \quad \mu_2 = 2 \quad \dim V_2 = 1$

Procedimento per ottenere la forma canonica di Jordan di una matrice quadrata di ordine n data $A_{n \times n}$

$\boxed{\text{Def.}}$ molteplicità algebrica

ⓐ $$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

p autovalori distinti

$$m_1 + m_2 + \cdots m_p = n$$

Def. molteplicità geometrica

$$\dim V_i = \dim \ker (A - \lambda_i I) = \mu_i$$

$i = 1, 2 \dots p$

Se [caso ⓐ]

$$\forall \lambda_i \qquad m_i = \mu_i \qquad i = 1, 2, \dots p$$

allora la matrice A è diagonalizzabile

$$T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix}$$

$$V_i = \ker(A - \lambda_i I)$$

ⓑ $\exists j : \lambda_j : \dim \ker(A - \lambda_j I) < m_j$

allora $\exists\, T$:

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ 0 & & J_2 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

forma di Jordan

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Def 1 data $A_{n \times n}$

rango generalizzato di ordine k

$$\rho_k \triangleq \operatorname{rank}(A - \lambda I)^k \quad k \geq 1$$

λ autovalore di A

$$\mu_k \triangleq n - \rho_k \qquad \nu_k \triangleq \mu_k - \mu_{k-1}$$

Considerati $\mu_k \triangleq n - \rho_k$ con $\mu_0 \equiv 0$

$$\nu_k \triangleq \mu_k - \mu_{k-1}$$

si definisce grado dell'autovalore il n° intero g per cui si ha

$$\nu_g \neq 0 \quad \nu_{g+1} = 0$$

giustificazione

$$J_i = \lambda_i I + N_i$$

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & I \\ & \end{bmatrix}$$

$$(N_i)^k = ?$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

Def] Dati A, λ_j si definisce **autovettore generalizzato** di ordine $\bar{k}$ associato a λ_j un vettore $\bar{v} \neq 0$ tale che:

$$(A - \lambda_j \cdot I)^{\bar{k}} \bar{v} = 0 ,$$

$$(A - \lambda_j \cdot I)^{\bar{k}-1} \bar{v} \neq 0$$

Def Dato $\bar{v}$ autovettore generalizzato di ordine k associato a λ_j, si definisce catena di autovettori relativa a λ_j:

$$\bar{v} \qquad (A-\lambda_j I)\bar{v} \qquad \cdots\cdots \qquad (A-\lambda_j I)^{k-1}\bar{v}$$

$$v^{(k)} \qquad v^{(k-1)} \qquad \qquad \qquad v^{(1)}$$

Lemma I vettori della catena sono lin. indip.

Algoritmo per determinare la forma di Jordan di una matrice $A_{n \times n}$

Data $A_{n \times n}$ con $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$

(0) $\lambda_j \quad j = 1, 2 \ldots p$

devo determinare il grado di ogni λ_j

$\Rightarrow$ $k = g \to$ grado di λ_j

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \emptyset$ $\leftarrow$ per ora insieme vuoto

$v_{g+1} = 0$

risultato dopo

(Oss) In dettaglio

Scelgo uno degli autovalori

(a) distinti λ_j $(j=1,2,\dots p)$: $\hat{j}$

(b) pongo $k=g$ grado di $\lambda_{\hat{j}}$

(c) considero $\textcircled{i} = \emptyset$

Inizio l'algoritmo su l'autovalore $\lambda_{\hat{j}}$

(1) - determinare $\nu_k - \nu_{k+1}$ autovettori generalizzati di ordine k, linearmente indipendenti fra loro e rispetto ai vettori presenti in B

per ciascuno costruire la catena

$$v_1^{(1)} \leftarrow \cdots \leftarrow v_1^{(k-1)} \leftarrow v_1^{(k)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$v_{\nu_k-\nu_{k+1}}^{(1)} \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow v_{\nu_k-\nu_{k+1}}^{(k-1)} \leftarrow v_{\nu_k-\nu_{k+1}}^{(k)}$$

(1 bis) se $\nu_k - \nu_{k+1} = 0$?

Nessuna catena va aggiunta a $\mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{$ tutti i vettori lin. indip. di tutte le catene costruite al passo 1 $\}$

(3) se $k = 1$ → passa (5)
altrimenti $k \leftarrow k-1$

(4) torna ad (1)

(5) le colonne di T relative all'autovalore $\lambda_{\hat{j}}$ sono tutti gli elementi di $\mathcal{B}$

(6) $\hat{j} \leftarrow \hat{j}+1$ e torna a (0bis)

I passi da 1 a 5 vanno ripetuti per tutti gli autovalori λ_j $j=1,2,\dots p$

Algoritmo per determinare

- il grado di un autovalore $\hat{\lambda}_j$ di una matrice $A_{n\times n}$
- il numero e la dimensione di ciascuna delle catene di autovettori generalizzati associate a $\hat{\lambda}_j$

dati A, $\hat{\lambda}_j$ ← NB è UNO degli autovalori distinti λ_j $j=1,2,\dots r$

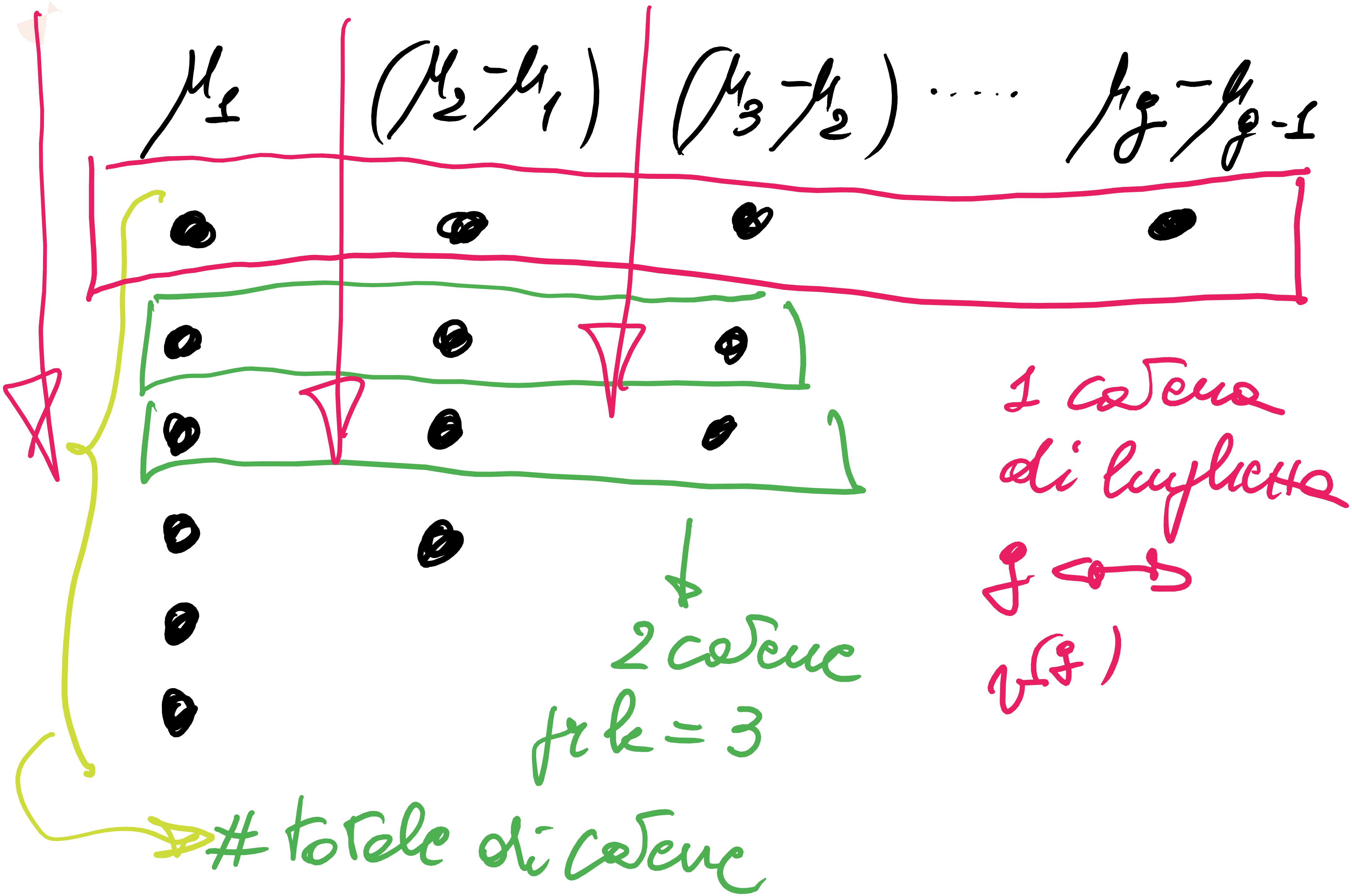
Vanno determinati:

$$\rho_k = \text{rank}(A - \hat{\lambda}_j \cdot I)^k \qquad k=1,2\dots$$

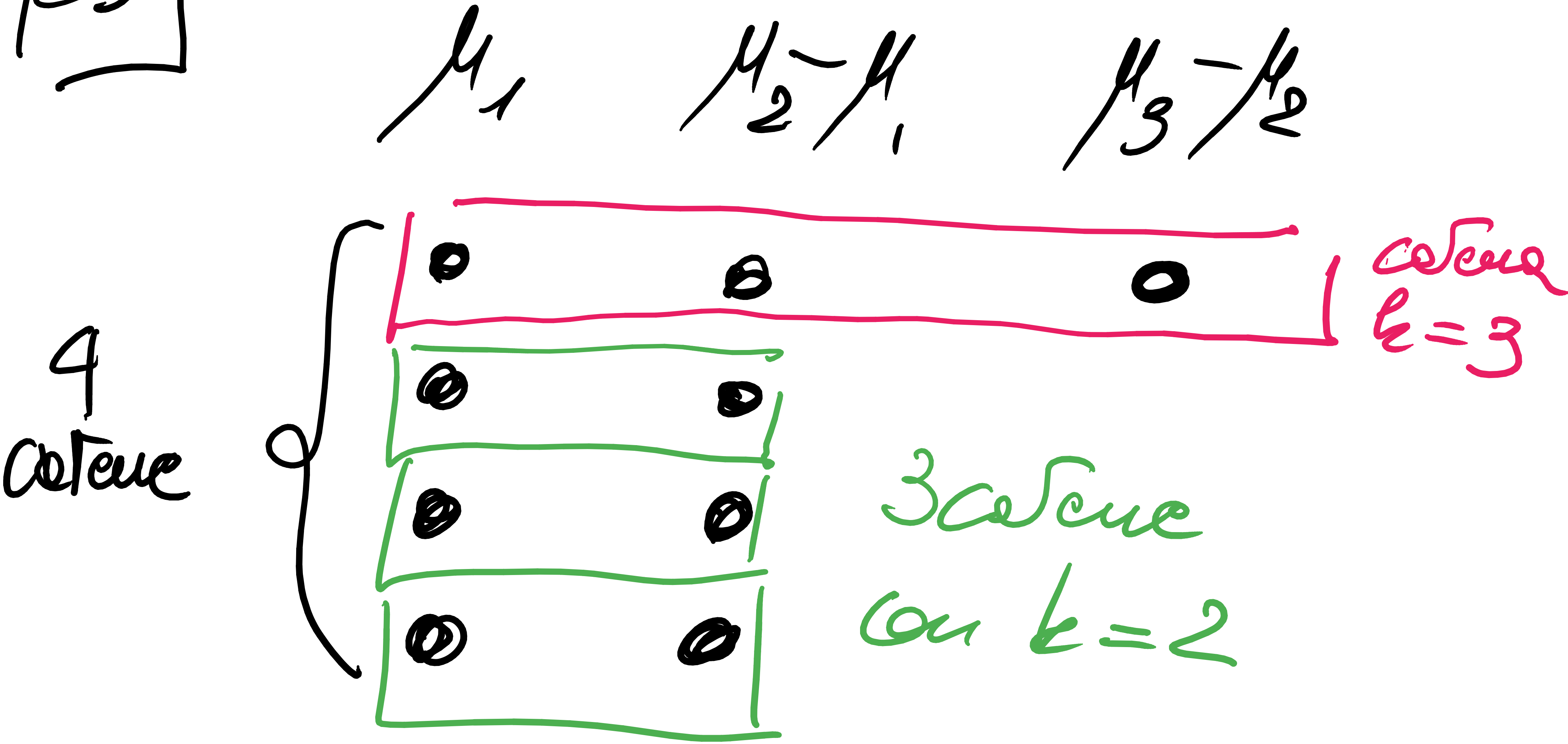
$$\mu_k = n - \rho_k \qquad (\mu_0 = 0)$$

$$\nu_k = \mu_k - \mu_{k-1}$$

fino a quando $\nu_{g+1} = 0$


μ_1
$(\mu_2-\mu_1)$
$(\mu_3-\mu_2)$ .....
$\mu_g-\mu_{g-1}$
1 catena
di lunghezza
$g \longleftrightarrow$
$\nu(g)$
2 catene
per $k=3$
totale di catene

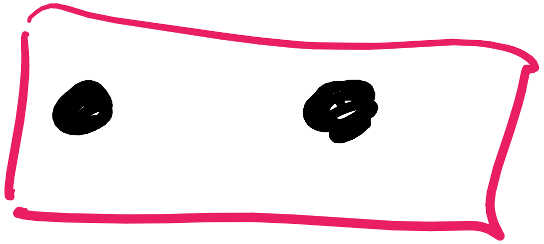
Es



Continuazione esempio

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mu_1 \qquad \mu_2-\mu_1$



1 casella

per $k=2$

$$\rho_1 = \text{rank}(A-2I) = 2$$

$$\mu_1 = 3-\rho_1 = 1$$

$$\rho_2 = \text{rank}(A-2I)^2 = 1$$

$$\mu_2 = 3-1 = 2$$

$\rho_3 = 1$

$\mu_3 = 1 \quad \mu_3-\mu_2 = 0$

$$v^{(2)} \in \ker(A-2I)^2$$

$$\notin \ker(A-2I)$$

$$\ker(A-2I)^2 = \ker\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$

$\cancel{v}$ $\nearrow$ $\qquad\qquad$ $\uparrow$ $v^{(2)}$

$$v^{(1)} = (A - \lambda I) v^{(2)} \Leftarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\| \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{array}{c|cc} & v^{(1)} & v^{(2)} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\mathcal{B}_{d=1} \qquad \mathcal{B}_{d=2}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Es. Determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^4$

un solo autovalore con molteplicità 4

valutazione di $\rho_k = \text{rank}(A-2I)^k$ e di μ_k

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = 2$

$\downarrow$

$\mu_1 = 4-2 = 2$ $\quad \nu_1 = 2$

μ_1

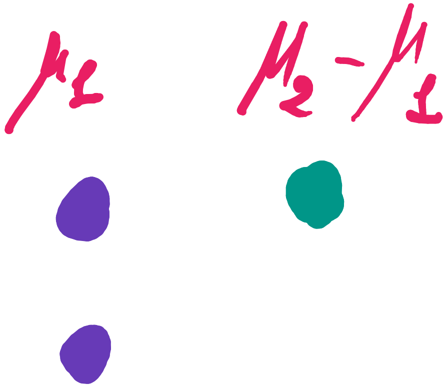
●

●

Troveremo 2 catene quindi 2 mini-blocchi di Jordan all'interno del blocco di Jordan associato a $\lambda = 2$

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = 1 \quad \begin{cases}\mu_2 = 4-1 = 3\\ \mu_2-\mu_1 = 1\end{cases}$$



$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_3 = 0$

$$\begin{cases} \mu_3 = 4 \\ \mu_3 - \mu_2 = 1 \end{cases}$$

μ_1	$\mu_2 - \mu_1$	$\mu_3 - \mu_2$
●	●	●
●		

chiaramente

$\rho_4 = \rho_3 = 0$

quindi

grado $g \to g = 3$

catena di lunghezza 3 da generare partendo da un autovettore generalizzato di ordine 3

$$(A-2I)^3 v^{(3)} = 0$$

catena di lunghezza 1 da generare partendo da un autovettore di ordine 1

$$(A-2I)v = 0$$

$$\ker(A-2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2I)^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2I)^3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Il vettore $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore generalizzato di ordine 3

Infatti $\begin{cases} (A-2I)^3 \bar{v} = 0 \\ (A-2I)^2 \bar{v} \neq 0 \end{cases}$

NB verificare che è l'unico autovettore generalizzato di ordine 3!

La catena cercata vale

$$(A-2I)\,\bar{v}^{(2)} = \bar{v}^{(1)} \leftarrow (A-2I)\,\bar{v}^{(3)} = \bar{v}^{(2)} \leftarrow \bar{v}^{(3)}$$

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \leftarrow & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \leftarrow & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{v}^{(1)} & & \bar{v}^{(2)} & & \bar{v}^{(3)} \end{array}$$

La seconda catena di lunghezza 1 è costituita da un autovettore generalizzato di ordine 1 che DEVE essere INDIPENDENTE da quelli che formano l'altra catena

$$\bar{w}^{(1)} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di Trasformazione

$$T = \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \overline{w}^{(1)} & \overline{v}^{(1)} & \overline{v}^{(2)} & \overline{v}^{3} \end{array}$$

La matrice inversa è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma canonica di Jordan cercata è

$$J_A = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2 miniblocchi

mini-blocco 1x1 ⟷ catena di lunghezza 1

mini-blocco 3x3 ⟷ catena di lunghezza 3

Es. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^5 \cdot \lambda$

$p(\lambda)=(\lambda-2)^5\cdot\lambda$

2 autovalori distinti

$\lambda_1 = 0$ con $m_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$ con $m_2 = 5$

la forma canonica di Jordan conterrà sicuramente un blocco 1×1 associato all'autovalore λ_1

per determinare invece quanti e di che dimensione saranno i mini-blocchi associati a λ_2 vanno calcolati s_k, μ_k, ν_k per $k=1,2,3,4,5$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = \text{rank}(A-2I) = 4$

$\mu_1 = 6-4=2$

$A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$

μ_1

●
●

$\Big\}$ ci saranno 2 catene quindi 2 mini-blocchi

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = \text{rank}(A-2I)^2 = 2$$

$$\mu_2 = 6-2 = 4$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1 = 2$$

μ_1	$\mu_2-\mu_1$
●	●
●	●

$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\rho_3 = \text{rank}(A-2I)^3 = 1$$

$$\mu_3 = 6-1 = 5$$

$$\nu_3 = \mu_3 - \mu_2 = 1$$

μ_1	$\mu_2-\mu_1$	$\mu_3-\mu_2$
●	●	●
●	●	

NB $\mu_3 = \mu_2$

Non potrà aumentare ancora

$$(A-2I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\rho_4 = \text{rank}(A-2I)^4 = 1$$

$$\mu_4 = 6-1 = 5$$

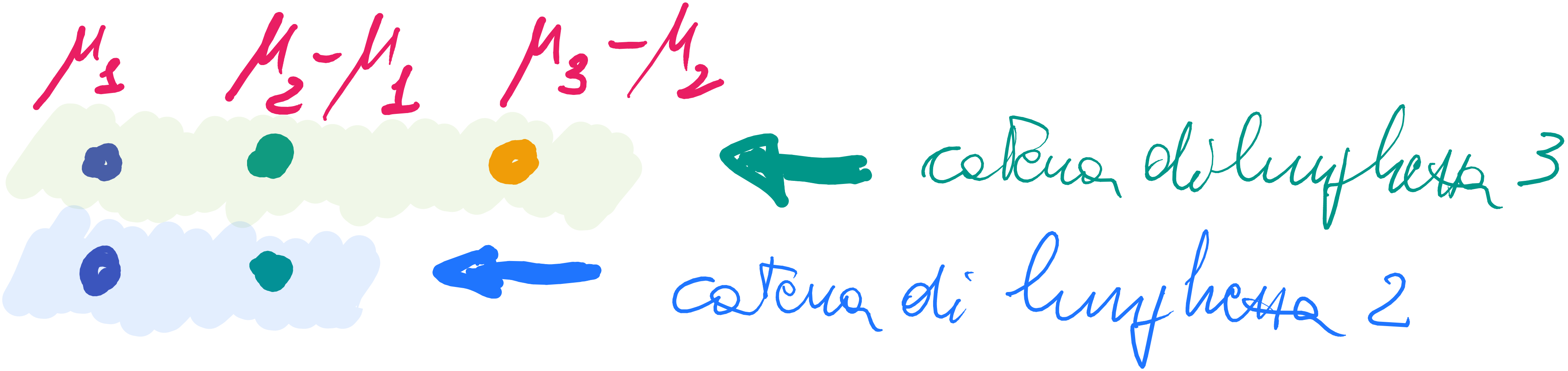
$$\nu_4 = \mu_4 - \mu_3 = 0$$

μ_1	$\mu_2-\mu_1$	$\mu_3-\mu_2$
●	●	●
●	●	

STOP!

λ_2 ha ordine

$g = 3$



NB si inizia SEMPRE dalla catena di lunghezza massima per poi determinare le altre (cfr. algoritmo passi da 0 a 5)

catena di lunghezza 3

deve esistere $\bar{v}^{(3)}$: $\bar{v}^{(3)} \in \ker (A-2I)^3$

$\bar{v}^{(3)} \notin \ker (A-2I)^2$

Verificare che

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{v} \in \ker (A-2I)^3$

$\bar{v} \notin \ker (A-2I)^2$

è autovettore generalizzato di ordine 3

$$\bar{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^{(1)} = (A - \lambda I)\vec{v}^{2} \leftarrow \vec{v}^{(2)} = (A - \lambda I)\vec{v}^{(3)} \leftarrow \vec{v}^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Catena di lunghezza 2

$\bar{w}$: $$(A-2I)^2\bar{w}=0$$

$$(A-2I)\bar{w}\neq 0$$

Verificare che

$$\bar{w}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\bar{w}\in\ker(A-2I)^2$

$\bar{w}\notin\ker(A-2I)$

$\bar{w}$ è autovettore generalizzato di ordine 2

$$w^{(1)} = (A - \lambda I)\, w^{(2)} \Leftarrow w^{(2)} = \overline{w}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

catena di lunghezza 1
associata a $\lambda_1 = 0$

$$\bar{w} : (A - \lambda_1 I)\bar{w} = 0$$

Verifico che $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è autovettore cercato

matrice T di trasformazione

$$T = \left[\bar{w} \,\middle|\, \bar{v}^{(1)} \,\middle|\, \bar{v}^{(2)} \,\middle|\, \bar{v}^{(3)} \,\middle|\, \bar{w}^{(1)} \,\middle|\, \bar{w}^{(2)} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +2 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

forma canonica $\quad J_A = T^{-1} A T$

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 9 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$= \dots$

sviluppo lungo questa colonna

$$p_A(\lambda) = (-1)^{7+7} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo
lungo questa
riga $\longrightarrow$

$= \ldots$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)\cdot(-1)^{6+6}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo questa riga →

$$= (1-\lambda)^2\cdot(-1)^{5+5}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo quella riga →

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & -1 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & -1 \\ -2 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo questa colonna

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 \cdot \Big\{ (-1)^{3+3} (2-\lambda) \cdot \big[-(1+\lambda)(2-\lambda) + 2 \big] +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \big[1+\lambda-2 \big] +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (1) \cdot \big[-2 + 2(2-\lambda) \big] \Big\} = \dots$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (2-\lambda)\left[\cancel{-2}-\lambda+\lambda^2+\cancel{2}\right] + (\lambda-1) + \right.$$

$$\left. + 2(1-\lambda) \right\}$$

$$= (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (2-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-1) + (1-\lambda)(2-1) \right\}$$

$$= (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (1-\lambda)\left[1-\lambda(2-\lambda) \right] \right\}$$

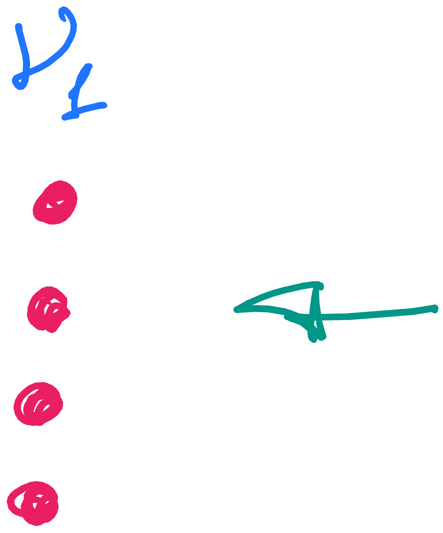
$$= (1-\lambda)^5 \cdot \left\{ 1-2\lambda+\lambda^2 \right\} = (1-\lambda)^7 \;//$$

$p_A(\lambda)=(1-\lambda)^7 \leftarrow$ potrebbe coinvolgere più di un mini-blocco di Jordan

$$A-I=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}=N$$

$\text{rank}\, N = \rho(N) = 3 \Rightarrow \mu_1 = 7 - 3 = 4$

$\nu_1 = \mu_1 - 0 = 4$



4 catene di autovettori associate tutte all'autovalore $\lambda = 1 \Rightarrow$ 4 miniblocchi di Jordan

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(N^2) = 1$$

$$\mu_2 = 7 - 1 = 6$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1 = 2$$

ν_1	ν_2
●	●
●	●
●	
●	

$N^3 = O_{7\times 7}$ $\qquad$ $\rho(N^3) = 0$

$\mu_3 = 7 - 0 = 7$ ← STOP all'algoritmo! L'indice non può aumentare ancora!

$\nu_3 = \mu_3 - \mu_2 = 1$

$g = 3$ (cfr algoritmo)

← una catena di lunghezza 3

← una catena di lunghezza 2

← 2 catene di lunghezza 1

Catena di lunghezza 3: $\bar{v} \in \ker(N^3)$, $\bar{v} \notin \ker(N^2)$

autovettore generalizzato di ordine 3

verifico che $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{cases} \bar{v} \in \ker(N^3) \\ \bar{v} \notin \ker(N^2) \end{cases}$$

la catena sarà

$$N^2\bar{v} \leftarrow N\bar{v} \leftarrow \bar{v}$$

In definitiva

$$\underset{N^2\bar{v}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \longleftarrow \underset{N\bar{v}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}} \longleftarrow \underset{\bar{v}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Per la catena di lunghezza 2 serve un autovettore generalizzato di ordine 2

$$\begin{cases} \bar{w} \in \ker(N^2) \\ \bar{w} \notin \ker(N) \end{cases}$$

Verifico che $\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{cases} \bar{w} \in \ker N^2 \\ \bar{w} \notin \ker N \end{cases}$$

La catena di lunghezza 2 è allora

$$\begin{array}{ccc} Nw & \leftarrow & w \\ \begin{bmatrix}-2\\0\\2\\-2\\0\\0\\-1\end{bmatrix} & & \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \end{array}$$

Mancano ora le 2 catene di lunghezza 1.

Possiamo semplicemente scegliere 2 vettori in modo che

$$\begin{cases} \bar{z}, \bar{r} \in \ker N \\ \left\{ N^2\bar{v} \quad N\bar{w} \quad \bar{z} \quad \bar{r} \right\} \text{ lin. indip.} \end{cases}$$

Per esempio:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

soddisfano i requisiti.

La matrice di trasformazione per la forma di Jordan allora è

$$T = \begin{bmatrix} N^2\bar{v} & N\bar{v} & \bar{v} & N\bar{w} & \bar{w} & \bar{z} & \bar{r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Define

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan cercata vale:

$$J_A = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$