

Calcolo di A^k

Utilizzo della
forma canonica di
Jordan della matrice A

Es.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

già in forma di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

$$A^k = ? \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

vale che

$$A^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 \\ 0 & J_2^k \end{bmatrix}$$

$$A^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 \\ 0 & J_2^k \end{bmatrix}$$

$$J_1^k = I \quad \forall k$$

$$J_2^k = ?$$

note that

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot I_{2 \times 2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot I_{2 \times 2} + N_2$$

$$J_2^k = (2 \cdot I_{2 \times 2} + N_2)^k = 2^k \cdot I_{2 \times 2}^k + k 2^{k-1} \cdot I_{2 \times 2}^{k-1} \cdot N_2 + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} I_{2 \times 2}^{k-2} N_2^2 + \dots$$

$$+ k^2 2 I_{2 \times 2} N_2^{k-1} + N_2^k$$

$$1B \quad N_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi $N_2^k \equiv O_{2 \times 2} \quad k \geq 2$

In definitiva

$$J_2^k = 2^k \cdot I_{2 \times 2} + k \cdot 2^{k-1} \cdot N_2 \quad k = 1, 2, \dots$$

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots$$

Es.

J_3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^k = ?$$

J_2

$$\begin{aligned} J_2^k &= \left(2 \cdot I_{3 \times 3} + N_3 \right)^k = 2^k \cdot I_{3 \times 3} + k 2^{k-1} \cdot N_3 + \\ &+ \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} N_3^2 + \dots \\ &\dots + k 2 \cdot N_3^{k-1} + N_3^k \end{aligned}$$

Vale che

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^3 \equiv \underset{3 \times 3}{\mathbf{0}}$$

quindi

$$J_2^k = 2^k \mathbb{I}_{3 \times 3} + k 2^{k-1} N_3 + \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} N_3^2$$

\vdots

J_k

$$\begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

J_k

$$\begin{bmatrix} 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} & \binom{k}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

Per la matrice A^k quindi vale che

$$A^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & \binom{k}{1} 2^{k-1} & \binom{k}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 0 & 2^k & \binom{k}{1} 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

J_1^k

J_2^k

Esercizi "per caso"

Trovare le espressioni di A^k
degli esercizi precedenti facendo
uso della Z-transformata

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ z (zI - A)^{-1} \right\}$$

Calcolo di A^k

Modi di risonanza

Sistemi Dinamici

22.11.2021/22

Es.

Assegnata la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

già in forma di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = [1] \quad J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

determinare i modi di risonanza presenti in A^k

Sappiamo già che vale l'espressione seguente

$$A^k = \left[\begin{array}{c|cc} I^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & k 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{array} \right] \quad k=1, 2, \dots$$

Quali sono allora i modi di input?

Modi di rijsola

$$A^k = A_{-1} d_{-1}^k \cdot I(k) +$$

$$+ A_{20} k! \binom{k}{0} d_2^k \cdot I(k) +$$

$$+ A_{21} k! \binom{k}{1} d_2^{k-1} I(k-1)$$

(modo di rijsola
associato ad autovalore
semplice)

Modi di rijsola associati ad
autovalore con molteplicità 2
e blocco di Jordan di dimensione 2

Come determinare i modi di risonanza?

2 possibilità:

→ utilizzo di
$$\mathcal{Z} \{ A^k \} = z (zI - A)^{-1}$$

e le formule presentate
in L2-P21 e segg.

→ sfruttare la conoscenza
di A^k e della sua forma
di Jordan

→ use questo
approach

B

il metodo proposto
risulta conveniente

se sono già note

la forma di Jordan J_A

la matrice di trasformazione T
e l'espressione di A^k

Altrimenti vanno utilizzate la
 δ -trasformata e le potenze in $L_2 P_2$

Sappiamo che

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & \end{array} \right]$$

come risultato della somma di 2 matrici

$$= \left[\begin{array}{c|cc} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & J_2 \end{array} \right]$$

Come ricavare A^k ?

$$A^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & J_2^k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}}_{M_2}$$

$$= M_1^k + M_2^k + k M_1^{k-1} M_2 + \binom{k}{2} M_1^{k-2} M_2^2 + \dots + \binom{k}{k-2} M_1^2 M_2^{k-2} + k M_1 M_2^{k-1}$$

NB i prodotti sono tutti nulli!

In definitiva

$$A^k = M_1^k + M_2^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

In dettaglio

$$A_1^k \cdot \mathbb{1}(k) \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{1}^k \cdot \mathbb{1}(k)$$

Al secondo ordine sono presenti 2 modi di risonanza (è un polinomio con molteplicità algebrica 2 e con associato un blocco di Jordan di dimensioni 2×2)

$$A_{20} \downarrow_2^k \cdot f(k) + A_{21} \binom{k}{1} \downarrow_2^{k-1} \cdot f(k-1)$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\downarrow
A

$$A_{20} 2^k \cdot f(k) + A_{21} \binom{k}{1} 2^{k-1} \cdot f(k-1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 2^k \cdot f(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \binom{k}{1} 2^{k-1} \cdot f(k-1)$$

2° modo \rightarrow determinare i modi di risposta
usando la z -trasformata

modo di risposta $A_I d_1^k \cdot 1(k)$

$$A_I = \lim_{z \rightarrow d_1} \left[(z - d_1) (zI - A)^{-1} \right]$$

La determinata $(zI - A)^{-1}$

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} (z-1) & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & -1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix}$$

quindi

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & \frac{1}{(z-2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$$

Finalmente il modo di risposta associato a $\lambda_1 = +1$ vale:

$$A_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)(zI-A)^{-1} \right] =$$
$$= \lim_{z \rightarrow 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z-1}{z-2} & \frac{z-1}{(z-2)^2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{z-1}{z-2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per gli altri modi di risposta

$$A_{20} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left[(z-2)^2 (zI-A)^{-1} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} (z-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & 1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2)^2 (zI - A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2} \begin{bmatrix} \frac{(z-2)^2}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & 1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e sappiamo che

$$P_A(\lambda) = \lambda^3$$

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

determinare i modi di influenza di A^k

1° modo: uso J_A e J_A^k

$$J_A^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

separo i contributi

$$= \begin{bmatrix} \delta(k) & \delta(k-1) & \delta(k-2) \\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1) \\ 0 & 0 & \delta(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \delta(k) & 0 & 0 \\ 0 & \delta(k) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \delta(k-1) & 0 \\ 0 & 0 & \delta(k-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta(k-2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Or, ricordando che $A^k = T J_+^k T^{-1}$
possiamo ottenere i modi di risposta con

$$A_{10} \cdot \delta(k) \leftrightarrow T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} \cdot \delta(k) =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \delta(k)$$

$$A_{11} \tilde{x}^{(k-1)} = T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \tilde{x}^{(k-1)}$$



$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe

$$A_2 \delta(k-2) = T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \cdot \delta(k-2)$$



$$T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Facciamo uso della z -trasformata

$$(zI - A) = \begin{bmatrix} z & -2 & 0 \\ -1 & z & 1 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}$$

perciò $(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^3} \begin{bmatrix} z^2 + 2 & 2z & -2 \\ +z & z^2 & -z \\ 2 & 2z & z^2 - 2 \end{bmatrix}$

e per i modi di risposta ci ha \downarrow

$$A_{10} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 (zI - A)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d}{dz} \left[z^3 (zI - A)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z^3 (zI - A)^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$