$\lim_{n\to+\infty} X_n = \alpha$

$\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad \forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_\varepsilon \quad |X_n-\alpha|<\varepsilon$

$\alpha=+\infty$ $\quad \forall M\in\mathbb{R}\ \exists\, n_M\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_M \quad X_n>M$

$\alpha=-\infty$ $\quad \forall M\in\mathbb{R}\ \exists\, n_M\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_M \quad X_n<M$

$X_n=(-1)^n \qquad X_0\ \ X_1\ \ X_2\ \ X_3\ \ X_4\ \ X_5\ \ X_6\ \dots$

Sottosuccessione $\quad$ Sia $(X_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$.

Sia $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una funzione crescente strettamente; diciamo sottosuccessione di $(X_n)_n$ la successione $\left(X_{\varphi(n)}\right)_n$ [è la funzione composta]

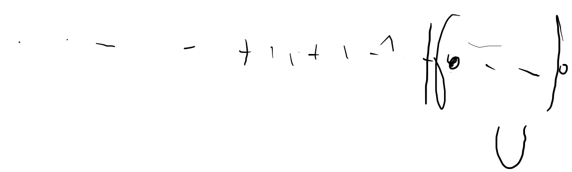
Es: $\varphi(n)=2n$ "scelgo i termini di indice pari"

$\varphi(n)=7n$ " ... "

Teorema sul limite delle sottosuccessioni

Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Sia $(x_{n_k})_k$ una sottosuccessione di $(x_n)_n$. Allora $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$.

<u>Dim</u> Sia U un intorno di α. Sappiamo che esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_U$ $\underline{x_n \in U}$.



Prendiamo $\underline{k_U} \in \mathbb{N}$ tale che $n_{k_U} \geq n_U$

se $k \geq k_U$ si ha $n_k \geq n_{k_U}$ quindi $n_k \geq n_U$ e quindi $x_{n_k} \in U$.

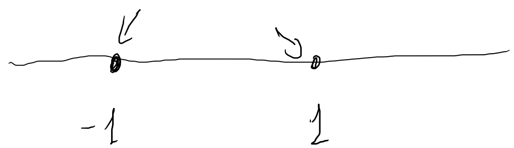
?

$\forall U$ intorno di α $\exists$ $k_U \in \mathbb{N}$ tale che $\forall k \geq k_U$ $z_k \in U$.

$\lim_{k\to+\infty} z_k = \alpha$

La non-esistenza di un limite

$x_n = (-1)^n$



Sia $(x_n)_n$ una successione; supponiamo che esistano due sottosuccessioni $(x_{n_k})_k$ e (x_{n_j}) tali che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$ $\quad \lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = \beta$ e $\alpha \neq \beta$.

Allora NON esiste $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

OSS: supponiamo che esistano due sottosuccessioni $(x_{n_k})_k$ e $(x_{n_j})_j$ tali che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = \alpha$. Allora è vero che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$? NO

Però: se x_{2n} (pari) $\quad x_{2n+1}$ (dispari)

$\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \alpha$ Allora è vero che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$? SI

$x_n \in U$ se $n \geq n_U$.

⚠ Teorema di esistenza del limite delle successioni monotone

Sia $(x_n)_n$ una successione monotona. Allora esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

Inoltre, se $(x_n)_n$ è crescente, $\alpha = \sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

se $(x_n)_n$ è decrescente, $\alpha = \inf\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

[Pikachu 1]

Es: esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+2}{n-5}$ $[n \geq 6]$

la successione è decrescente: $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \geq 6$

$$\frac{\overbrace{2(n+1)+2}^{2n+4}}{\underbrace{(n+1)-5}_{n-4}} \overset{?}{<} \frac{2n+2}{n-5} \rightsquigarrow \cancel{2}(n+2)(n-5) \overset{?}{<} \cancel{2}(n+1)(n-4)$$

$$\cancel{n^2}-\cancel{3n}-10 \overset{?}{<} \cancel{n^2}-\cancel{3n}-4$$

$$-10 < -4 \quad \text{OK !}$$

Si osservi che $X_n \geq 0 \quad \forall n$

quindi è convergente.

$$\frac{2n+2}{n-5} = 2\left(\frac{n-5+6}{n-5}\right) = 2\left(1+\frac{6}{n-5}\right)$$

tende a 0 !

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+2}{n-5} = 2$$

__Teorema__ (limite della somma)

Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ $\lim_{n\to+\infty} y_n = \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora $\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = \alpha + \beta$.

__Dim__ Sappiamo che $\forall \varepsilon_1 > 0$ $\exists\, n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_{\varepsilon_1}$ $|x_n - \alpha| < \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0$ $\exists\, n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_{\varepsilon_2}$ $|y_n - \beta| < \varepsilon_2$

Proviamo che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|(x_n + y_n) - (\alpha+\beta)| < \varepsilon$.

Fissato $\varepsilon > 0$:

$$|(x_n + y_n) - (\alpha+\beta)| = |(x_n - \alpha) + (y_n - \beta)| \leq \underbrace{|x_n - \alpha|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon \text{ se } n \geq n_{\varepsilon_1}} + \underbrace{|y_n - \beta|}_{< \frac{1}{2}\varepsilon \text{ se } n \geq n_{\varepsilon_2}} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

$\frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon_1$

$<$ se $n \geq \underbrace{\max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}}_{n_\varepsilon}$

Teorema

1) Sia $\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $\beta = \lim_{n\to+\infty} y_n$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{n\to+\infty} (a x_n + b y_n) = a\alpha + b\beta$.

[Dim Pitacchi ?]

2) Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$; sia $(y_n)_n$ una successione inferiormente limitata (non chiedo l'esistenza del limite!)

Allora $\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty$ [Scorzoni]

3) Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, sia (y_n) una successione superiormente limitata

Allora $\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = -\infty$.

Teorema del confronto dei limiti [Mystery]

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$ $\quad \lim_{n \to +\infty} y_n = \beta$ $\quad [\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}]$

Sia definitivamente $x_n \leq y_n$. Allora $\alpha \leq \beta$.

Dim

⚠ $x_n = -\frac{1}{n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n}$ $\quad x_n < y_n \ \forall n$ $\quad \lim_{n \to +\infty} x_n = 0 = \lim_{n \to +\infty} y_n$

onde se $x_n < y_n \ \forall n$ non è vero in generale $\alpha < \beta$!

Teorema dei due carabinieri

Siano $x_n \leq y_n \leq z_n$ definitivamente. Sia $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} z_n = \alpha$

Allora <u>esiste</u> il limite $\lim_{n \to +\infty} y_n$ e $\lim_{n \to +\infty} y_n = \alpha$.

Dim [RTX 3080].

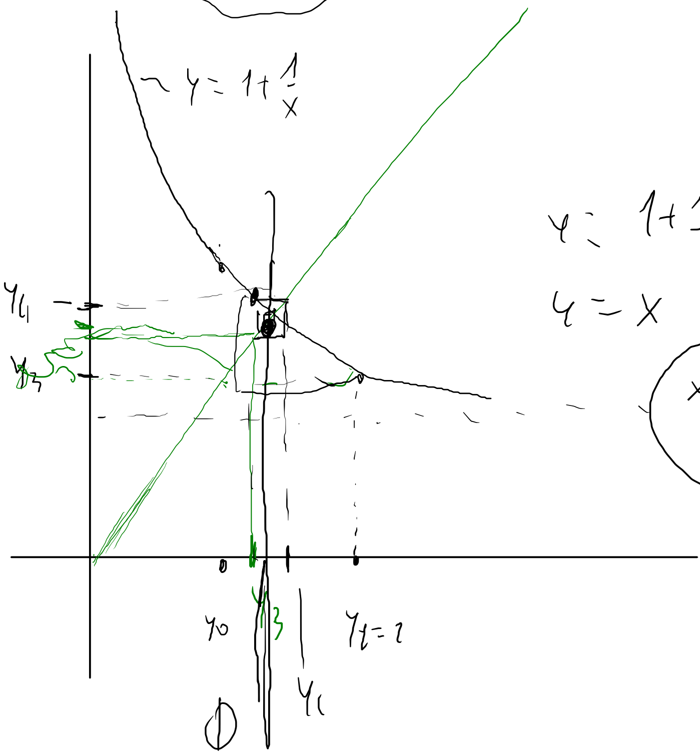
Esempio $\quad (x_n)_n$ Fibonacci

$$y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad y_0 = 1 \quad y_1 = 2 \quad y_3 = \frac{3}{2} \ \ldots$$

$$y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n}$$

esiste $\lim_{n \to +\infty} y_n = \phi \qquad \phi$ numero aureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

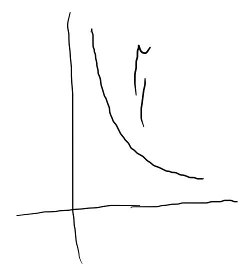


$y = 1 + \frac{1}{x}$

$y = x$

$x = 1 + \frac{1}{x}$

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$



$$y_3 = 1 + \frac{1}{y_2}$$

$Y_{2n} < \phi$ $\quad Y_{2n+1} > \phi \quad \forall n$

Consideriamo la successione $(Y_{2n})_n$: è crescente e superiormente limitata (da ϕ)

$Y_{2(n+1)} \overset{?}{>} Y_{2n} \quad \forall n$ $\qquad Y_{2n+1} = 1 + \frac{1}{Y_{2n}}$

$$Y_{2n+2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{Y_{2n}}} = 1 + \frac{Y_{2n}}{1+Y_{2n}} =$$

Y_2.

$$= \frac{1+2Y_{2n}}{1+Y_{2n}} \overset{?}{>} Y_{2n}$$

$1+2t > t(1+t)$

$t^2 - t - 1 < 0$ se $t < \phi$

$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

? vero!

Y_{2n+1} è decrescente e inferiormente limitata da ϕ

$(y_{2n})_n$ è crescente e limitata, quindi esiste $\lim_{n\to+\infty} y_{2n+2} = \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \leq \phi$

$\lim_{n\to+\infty} z_n = \alpha \neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\alpha}$

$$\underbrace{y_{2(n+1)}}_{\downarrow \; \alpha} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\underbrace{y_{2n}}_{\downarrow\;\alpha}}}$$

$\Downarrow$

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}}$$

$$\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \qquad \alpha = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}$$

$$\alpha + \alpha^2 = 1 + 2\alpha$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \phi$$

Similmente si verifica che $\lim_{n \to +\infty} y_{2n+1} = \phi$

quindi $\lim_{n \to +\infty} y_n = \phi$.

Teorema del limite della successione reciproca

Sia $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ $\quad$ Sia $x_n \neq 0$ $\forall n$

Allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\alpha}$. [Dim. Ghibli]

Esempio

Sia r tasso di interesse es: 1%

C_0 capitale investito dopo 1 anno $C_1 = C_0(1+r)$

$$C_{6\,mesi} = C_0 + \frac{1}{2} r C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{2}r\right)$$

$$C_{12\,mesi} = C_0\left(1+\frac{1}{2}r\right) + r C_0\left(1+\frac{1}{2}r\right) = C_0\left(1+\frac{1}{2}r\right)^2$$

mensilmente $\quad C_1 = C_0\left(1+\frac{1}{12}r\right)^{12}$

$$C_0\left(1+\frac{1}{12}r\right) + r\left(1+\frac{1}{12}r\right)C_0 \approx C_0\left(1+\frac{1}{12}r\right)^2 \ldots$$

giornaliero $C_1 = C_0\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = ?$$

$r = 1$

<u>Teorema</u> La successione $(x_n)_n$ con $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata.

Quindi esiste finito $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; questo limite si indica con e ed è un numero compreso tra 2 e 3 $2 < e < 3$. Si dice numero di Nepero

Dem

$$X_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \underbrace{1 + \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}}_{2} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{\underbrace{n^k}_{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}} = \frac{1}{k!}\left[\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1-\frac{1}{n}}\cdot\underbrace{\frac{n-2}{n}}_{1-\frac{2}{n}}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{1-\frac{k-1}{n}}\right] =$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

$$X_n = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\underbrace{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\cdots}_{<1}\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{<1}}_{<1} < 2 + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

Proviamo che $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1$

Mostriamo che $k! \geq 2^{k-1} \quad \forall k \geq 2$

[vero se $k=2$ $\quad 2! = 2 \geq 2^{2-1}$ OK

vero k $\rightsquigarrow$ vero per $k+1$

$$(k+1)! = \underbrace{k!}_{\geq 2^{k-1}} \cdot (k+1) \geq 2^{k-1} \cdot \overbrace{(k+1)}^{\geq 2} \geq 2^{k} \quad //$$