12 ottobre

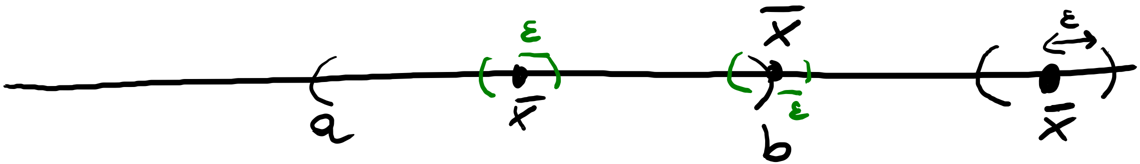
Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice di accumulazione per X se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon .$$

Denoterò con X' l'insieme dei punti di accumulazione di X.

$X = (a, b) \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Allora $\quad X' = [a, b]$



In generale se $X \subseteq \mathbb{R}$ denoteremo con

$\bar{X} = X \cup X'$. $\bar{X}$ è la chiusura di X in $\mathbb{R}$.

$$\overline{(a,b)} = [a,b]$$

$$\overline{[a,b)} = [a,b) \cup [a,b)' = [a,b) \cup [a,b] =$$
$$= [a,b]$$

In generale, se $X = \overline{X}$, X si dice un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$.

Esempio Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è finito, allora $X' = \emptyset$

Dim Se X è finito, è della forma

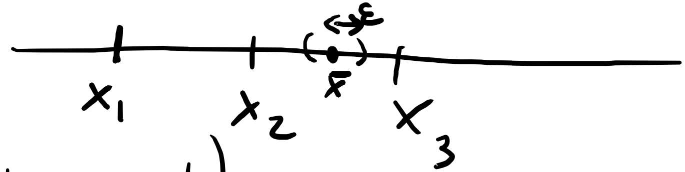
$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{con}$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Se per assurdo $\exists\ \bar{x} \in X'$ ci sono due possibilità.

O $\bar{x} \in X$ oppure $\bar{x} \notin X$.

Se $\bar{x} \notin X$ allora



$$\min\{|\bar{x}-x_1|, \dots, |\bar{x}-x_n|\} > 0$$

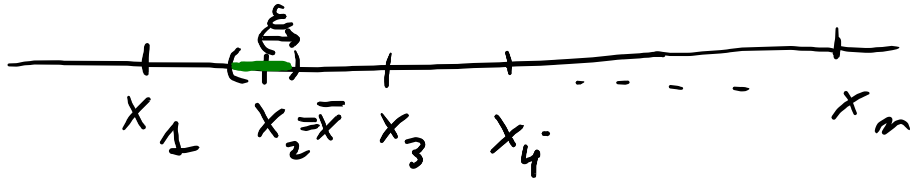
Se $0 < \varepsilon < \min\{|\bar{x}-x_1|, \dots, |\bar{x}-x_n|\}$ allora

$0 < \varepsilon < |\bar{x}-x_j|$ per tutti gli $j = 1, \dots, n$

cioè ho trovato che $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $|x-\bar{x}| > \varepsilon$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow$ È falso "$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X$ t.c. $0 < |x-\bar{x}| < \varepsilon$"

Se $\bar{x} \in X$



allora $\bar{x} = x_{j_0}$

$$\min\{\, |x_k - x_{j_0}| : k \neq j_0 \,\} > 0$$

Sia $0 < \varepsilon_0 < \min\{\, |x_k - \overbrace{x_{j_0}}^{\bar{x}}| ; k \neq j_0 \,\}$

Quindi, $\forall\, x \in X$ t.c. $x \neq \bar{x}$, ho $|x - \bar{x}| > \varepsilon_0$

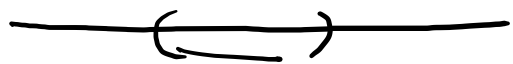
Quindi è falso che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in X \ \text{t.c.} \ 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

Se X è finito

$$X' = \emptyset \implies \bar{X} = X \cup X' = X$$

<u>Def</u> Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che sia chiuso (cioè $X = \bar{X}$) e limitato (cioè $-\infty < \inf X \leq \sup X < +\infty$) è detto compatto.

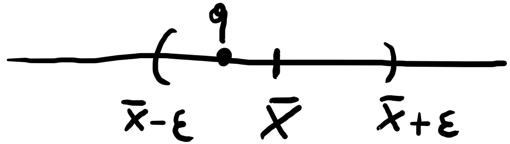


$X = \mathbb{N}, \mathbb{Z} \Rightarrow X' = \emptyset$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Più precisamente $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$

quindi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$

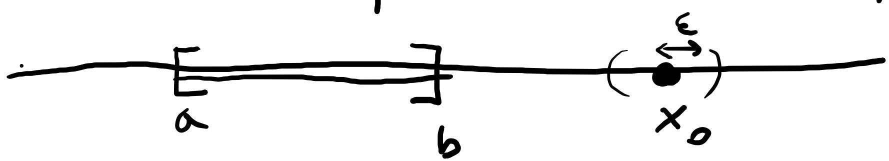
Dimostriamo che $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$



Consideriamo $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x})$. Supponiamo che $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $\bar{x} - \varepsilon < q < \bar{x}$. Conclusione: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $0 < |q - \bar{x}| < \varepsilon$.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$ $\quad x_0 \notin X'$.

Allora x_0 si dice punto isolato di X.



Equivalentemente. Un punto $x_0 \in X$ si dice punto isolato se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $x \in X$ e $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow x = x_0$.

$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esercizio Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$ e non costante. Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste.

Es $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ non esiste

Dim Sia per assurdo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Allora

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\exists \ x_1, x_2$ t.c. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Consideriamo i punti x_1+nT. Per

$$x_1+nT > M_\varepsilon \iff n > \frac{M_\varepsilon - x_1}{T}$$

segue $$|f(x_1+nT)-L| = |f(x_1)-L| < \varepsilon$$

Concludiamo che $\forall \varepsilon>0$ si ha $|f(x_1)-L|<\varepsilon \Rightarrow$

$L = f(x_1)$.

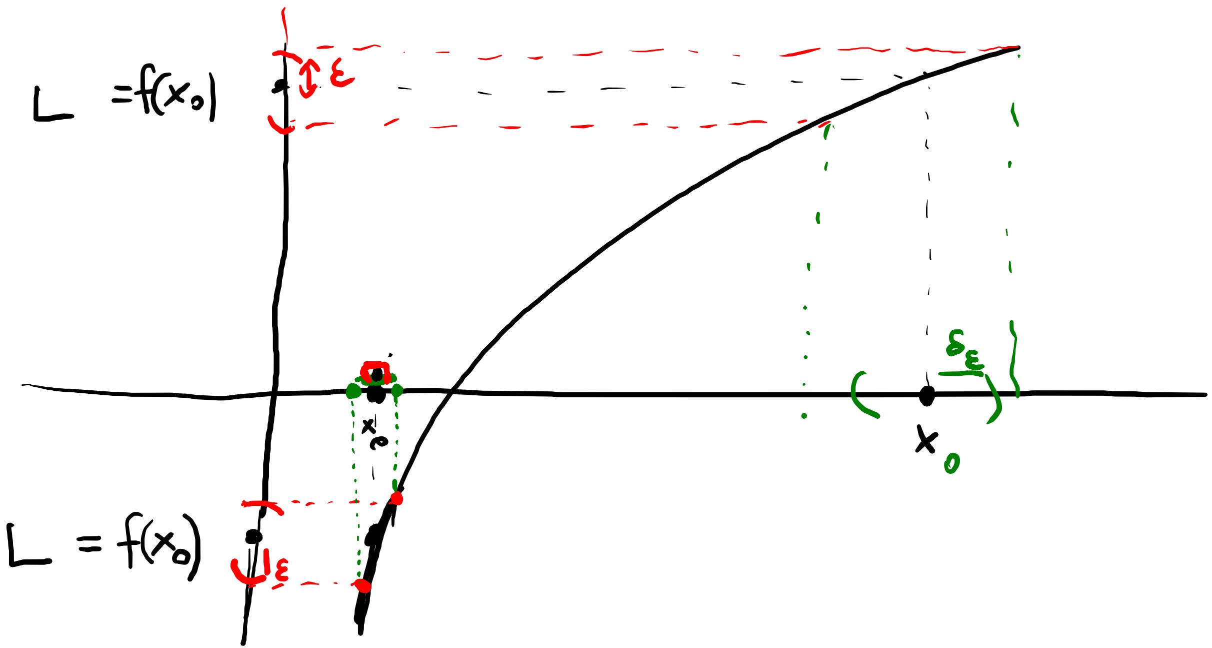
Ripetendo lo stesso ragionamento con x_2, ricaviamo

$L = f(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ quindi

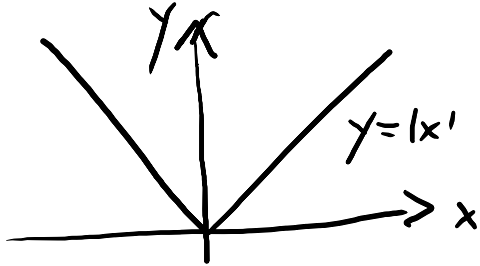
Def Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X'$ e sia $L \in \mathbb{R}$. Scriviamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se si ha quanto segue:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \text{e}\ x \in X \implies |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



<u>Esempio</u> $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$



Utilizzeremo la disuguaglianza

$$\big|\,|x| - |x_0|\,\big| \leq |x - x_0| \qquad \forall\ x,\ x_0 \in \mathbb{R}$$

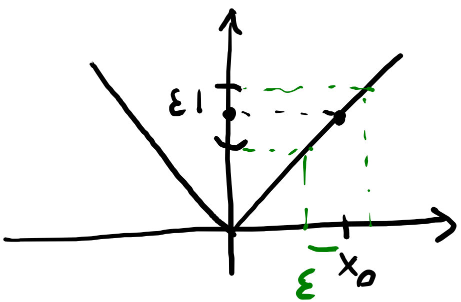
Vogliamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|\,|x| - |x_0|\,\big| < \varepsilon .$$

Scegliamo $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Allora

$$\big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0|$$

È ovvio che $0 < |x - x_0| < \varepsilon = \delta_\varepsilon \Rightarrow \big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| < \varepsilon$



$$\Rightarrow \big||x| - |x_0|\big| < \varepsilon$$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in X$. Se x_0 è un punto isolato di X diremo che f è continua in x_0.
Se invece x_0 è un punto di accumulazione per X allora diciamo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se f è continua in tutti i punti di X allora si dice che f è continua in X

$C^0(X)$

$C^0(X)$ è l'insieme delle $f: X \to \mathbb{R}$ continue in X.

<u>Def</u> 2 Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$.

Allora f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.