Principio di induzione

1. Dimostrare per induzione che:
   - $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
   - $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$
   - $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. Applicando il principio di induzione dimostrare che:
   - $7^n + 3n - 1$ è multiplo di 9 $\forall n \geq 1$
   - $n^3 - n$ è multiplo di 6 $\forall n \geq 1$
3. Dimostrare che:
   - $2^n \geq 2n$
   - $3^n \geq n^2$
   - $y^n - x^n \leq (x + y)^{n-1}(y - x) \quad \forall y \geq x \geq 0$ e $\forall n \geq 1$
4. Considerando la successione di Fibonacci, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ si dimostri per induzione che,
$$\forall i \geq 3$$
$$a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j.$$
5. Definendo per ricorrenza la successione: $a_1 = 1, a_2 = 5, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dimostrare che
$$a_n = 3^n - 2^n$$
6. (Cardinalità dell'insieme delle parti) Dimostrare per induzione su n che, se A è un insieme finito di $n \geq 1$ elementi, allora $|P(A)| = 2^n$.
7. (Principio del buon ordinamento) Ogni insieme $S \subset \mathbb{N}, S \neq \emptyset$, ammette un elemento minimo.
8. Dimostrare attraverso il principio di induzione che, dati n punti del piano tali che, comunque se ne scelgano 3 di essi, questi non sono allineati, il numero di tutte le possibili rette passanti per due di essi è $n(n - 1)/2$.
9. Dimostrare che:
   - $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$