Vettori

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, i = 1, \dots, n \}$$

Gli elementi di $\mathbb{R}^n$ si chiamano <u>vettori</u>.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \,,\quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\rightsquigarrow \quad x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Somma di vettori

$$\lambda \in \mathbb{R} \,,\quad x = (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \lambda x \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

prodotto scalare

Si ha:

1) $\mathbb{R}^n$ è un <u>gruppo abeliano</u> rispetto a $+$ con elemento neutro $0 := (0, \dots, 0)$ e $-x := (-x_1, \dots, -x_n)$ per $x = (x_1, \dots, x_n)$

2) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$
3) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
4) $(\lambda \mu) x = \lambda (\mu x)$
5) $1 x = x$

Le precedenti valgono $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

In modo analogo, dato un campo $\mathbb{K}$, definiamo

$$\mathbb{K}^n \overset{def}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

e chiamare gli elementi di $\mathbb{K}^n$ <u>vettori</u>, con le operazioni di somma e prodotto scalare viste nel caso di $\mathbb{R}^n$

Gli elementi di $\mathbb{K}$ vengono chiamati anche <u>Scalari</u>.

In questo modo, dalle definizioni di somma e prodotto scalare e dalle proprietà algebriche di $\mathbb{K}$, seguono facilmente le proprietà 1) ... 5) (con $\mathbb{K}$ al posto di $\mathbb{R}$).

Def $\mathbb{K}^n$ si chiama <u>$\mathbb{K}$-spazio vettoriale numerico</u> di dimensione n o anche n-spazio vettoriale numerico su $\mathbb{K}$.

Es $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-Spazio vett. numerico di dim n.

$\mathbb{C}^n$ $\mathbb{C}$ - " " " " " "

$(\mathbb{Z}_p)^n$ $\mathbb{Z}_p$ - " " " " " "

Si pone $\mathbb{K}^0 \overset{def}{=} \{0\}$ (0 denota lo zero di $\mathbb{K}$)

OSS $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ hanno infiniti vettori per $n \geq 1$ mentre $(\mathbb{Z}_p)^n = \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p}_{n \text{ volte}}$ ne ha p^n.

Sistemi lineari

1) Un'equazione e un'incognita.

$ax = b$ Se $a \neq 0 \rightsquigarrow x = a^{-1} b$

OSS Dove stanno a e b?

Se $a, b \in \mathbb{R}$ il calcolo ha senso

Ma se $a = 2$ e $b = 0$ in $\mathbb{Z}_4$ non ha senso!
($\nexists\ 2^{-1}$ in $\mathbb{Z}_4$)

In effetti l'equazione $2x = 0$ in $\mathbb{Z}_4$ ha soluzioni $x = 0$, $x = 2$.

Se invece abbiamo $2x = 0$ in $\mathbb{Z}_5$ allora $2 \neq 0$ in $\mathbb{Z}_5$ ($2^{-1} = 3$) e l'equazione $2x = 0$ ha l'unica soluzione $x = 0$.

$ax = b$ ha l'unica soluzione
$x = a^{-1} b$
se $a, b \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ campo.

Es Su $\mathbb{Q}$ $3x = \frac{2}{7} \rightsquigarrow x = \frac{2}{21}$

Su $\mathbb{R}$ $\sqrt{2}\, x = 1 - \sqrt{3} \rightsquigarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Su $\mathbb{C}$ $(1 + \sqrt{2}\, i)\, x = 2 \rightsquigarrow x = \frac{2}{1+\sqrt{2}\, i} = \frac{2 - 2\sqrt{2}\, i}{3}$

Su $\mathbb{Z}_5$ $\quad 3x = 2 \rightsquigarrow x = 4$

Ma su $\mathbb{Z}_6$ $\quad 3x = 2$ non ha soluzioni

Nel corso lavoreremo sempre su un campo $\mathbb{K}$ (generalmente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e a volte useremo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$).

2) Due equazioni e due incognite

Su $\mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 11y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = \frac{1}{11} \end{cases}$

Su $\mathbb{Z}_3$ $\quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \quad (= 4^{-1}) \\ y = 2^{-1} \cdot 4 = 2 \end{cases}$

$(3 = 0)$

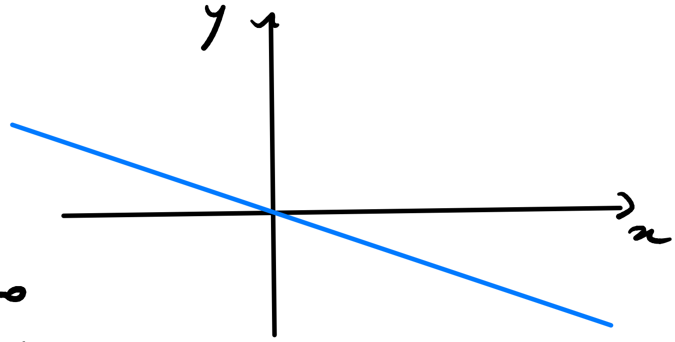
Un sistema lineare in cui i termini noti sono nulli è detto <u>sistema omogeneo</u>

Su $\mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ -11y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Un sistema omogeneo ha sempre la soluzione nulla, ma potrebbe averne altre.

Su $\mathbb{R}$ $\begin{cases} x+3y=0 \\ 6x+18y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3t \\ y=t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
$t \in \mathbb{R}$

In questo caso si hanno infinite soluzioni che sono i punti di una retta in $\mathbb{R}^2$



Le soluzioni sono coppie (x,y) che soddisfano tutte le equazioni del sistema quindi sono vettori di $\mathbb{R}^2$ (o di $\mathbb{K}^2$ se lavoriamo su un campo $\mathbb{K}$)

Es $\quad x+3y=0$ in $\mathbb{Z}_5$

$x=-3y$ cioè $x=2y$ $\quad (2=-3$ in $\mathbb{Z}_5)$

ha soluzioni:

$\{(0,0),(2,1),(4,2),(1,3),(3,4)\}$

cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{Z}_5$

Formalmente operiamo allo stesso modo su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{Z}_p$ (anche se cambia molto l'insieme delle soluzioni)