Teorema Sia $A \subset X$ un sottospazio. Se X è metrizzabile allora anche A è metrizzabile.

Dim Sia $d_X : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una distanza che induce la topologia di X e poniamo

$$d_A \overset{\text{def}}{=} d_X\big|_{A \times A} : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$d_A(x,y) = d_X(x,y) \quad \forall\, x,y \in A.$$

E' banale che d_A sia una distanza su A.

Sia ora $V \subset A$ aperto relativo, $x \in V$

$\exists\ U \subset X$ aperto in X t.c. $V = U \cap A$

$\Rightarrow$ $B_X(x;r) \subset U$ per un certo $r > 0$ (B_X boccia in X)

Si ha $B_A(x;r) = B_X(x;r) \cap A \subset V$,

dove $B_A(x;r)$ denota la boccia in A rispetto a d_A

Quindi le bocce $B_A(x;r) \subset A$ sono aperte in A e generano la topologia di sottospazio.

Esempio B^n e S^n sono metrizzabili.

Intorni

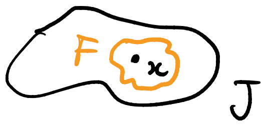
Def X spazio topologico, $x \in X$. Un sottoinsieme $J \subset X$ è detto <u>intorno</u> di x in X se $\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J$.
Se J è un aperto e $x \in J$, diremo che J è un <u>intorno aperto</u> di x in X.

Esempi
- $J = [-1, 2] \cup]4, +\infty[$ è intorno (non aperto) di $0 \in \mathbb{R}$, infatti $0 \in]-1, 1[\subset J$.
- J non è intorno di 2 pur essendo $2 \in J$.
- $]-1, \frac{1}{2}[$ è intorno aperto di $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

Base di intorni

Def X spazio topologico, $x \in X$. Una famiglia $\mathcal{F}_x$ di intorni di $x \in X$ è detta <u>base di intorni di x</u> (o anche <u>sistema fondamentale di intorni di x</u>) se $\forall\, J \subset X$ intorno di x in X $\exists\, F \in \mathcal{F}_x$ t.c. $F \subset J$ (naturalmente $x \in F$ in quanto intorno).

Esempio In $\mathbb{R}^n$ la famiglia



$$\mathcal{F}_x = \{ B(x; \tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

è una base di intorni per $x \in \mathbb{R}^n$. $\boxed{E}$

X spazio topologico, $x \in X$ $\rightsquigarrow$

$$\mathcal{J}_x := \{ J \subset X \mid J \text{ intorno di } x \in X \}$$

sistema degli intorni di $x \in X$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{J} := \{ \mathcal{J}_x \}_{x \in X}$ sistema degli intorni di X (è una famiglia di famiglie)

Def Una base (o sistema fondamentale) di intorni per X è una famiglia

$$\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_x \}_{x \in X}$$

dove ogni $\mathcal{F}_x$ è una base d'intorni per $x \in X$.

OSS (X, d) spazio metrico $\Longrightarrow$

$$\mathcal{B}_x = \{ B(x; r) \mid r > 0 \}$$

base di intorni di $x \in X$

$$\mathcal{B} = \{ \mathcal{B}_x \}_{x \in X}$$ base d'intorni per X.

Applicazioni continue

Def Siano X e Y spazi topologici.

Un'applicazione $f: X \longrightarrow Y$ è continua se per ogni aperto $V \subset Y$, la preimmagine $f^{-1}(V) \subset X$ è aperto in X.

OSS $f: X \to Y$ continua $\Longleftrightarrow$
$f^{-1}(A) \subset X$ chiuso $\forall\, A \subset Y$ chiuso.

Def $f: X \longrightarrow Y$ è detta applicazione aperta se per ogni aperto $U \subset X$, l'immagine $f(U) \subset Y$ è aperto in Y.

Esempi 1) $id_X : X \to X$ è aperta e continua $\forall$ spazio X.

2) $f: X \longrightarrow Y$ costante (cioè $\exists\, y_0 \in Y$ t.c. $f(x) = y_0\ \forall x \in X$) è sempre continua, ed è aperta $\Longleftrightarrow \{y_0\}$ aperto in Y (es. se Y_{dis})

3) $\forall\, f: X \longrightarrow Y_{ban}$ è continua

$\forall\, f: X_{dis} \to Y$ è continua

4) $id: \mathbb{R}_{dis} \longrightarrow \mathbb{R}_{eucl}$ continua

$id: \mathbb{R}_{eucl} \longrightarrow \mathbb{R}_{dis}$ aperta ma non continua

OSS $f : X \to Y$ continua $\iff$ $f^{-1}(A) \subset X$ chiuso in X $\forall A \subset Y$ chiuso in Y.

Teorema $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ continue $\implies$ $g \circ f : X \to Z$ continua.

Dim $V \subset Z$ aperto $\implies$ $g^{-1}(V) \subset Y$ aperto $\implies$

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \subset X \text{ aperto.}$$

OSS $A \subset X$ sottospazio $\implies$ la mappa d'inclusione $i : A \to X$ è continua

Proposizione Sia $f : X \to Y$ continua e $A \subset X$ un sottospazio. Allora $f|_A : A \to Y$ è continua.

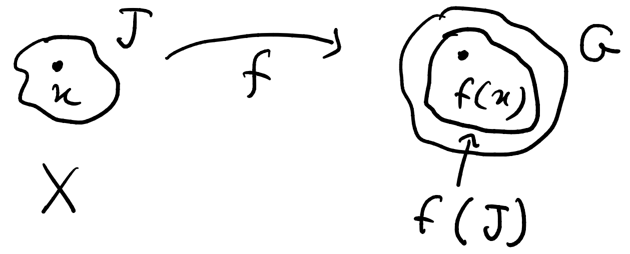
Dim $f|_A = f \circ i$, con $i : A \to X$ mappa d'inclusione

Teorema Siano X e Y spazi topologici e $f: X \to Y$.
Le seguenti sono equivalenti:

i) f è continua;

ii) Data $\mathcal{B}$ base per Y, $f^{-1}(B) \subset X$ aperto $\forall\, B \in \mathcal{B}$;

iii) Date $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_x\}_{x \in X}$ e $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_y\}_{y \in Y}$ basi di intorni per X e Y rispettivamente, $\forall\, x \in X$ $\forall\, G \in \mathcal{G}_{f(x)}$ $\exists\, J \in \mathcal{F}_x$ t.c. $f(J) \subset G$



Dim $(i) \Rightarrow (ii)$ ovvio

$(ii) \Rightarrow (iii)$

$\exists\, B \in \mathcal{B}$ t.c. $f(x) \in B \subset G \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(G)$

e $f^{-1}(B) \subset X$ aperto quindi è intorno di x in X

$\Rightarrow \exists\, J \in \mathcal{F}_x$ t.c. $J \subset f^{-1}(B) \Rightarrow f(J) \subset B \subset G$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sia $V \subset Y$ aperto, $x \in f^{-1}(V) \Rightarrow$

$\exists\, G \in \mathcal{G}_{f(x)}$ t.c. $G \subset V \rightsquigarrow J \in \mathcal{F}_x$ t.c.

$f(J) \subset G \Rightarrow x \in J \subset f^{-1}(G) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow$

$\exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset J \subset f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f^{-1}(V) \subset X$ aperto. Quindi f è continua.