

TEORIA DI YANG-MILLS

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

già interessante (anche senza matrici)
che include in elettrodin.

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Esiste un'altra termine gauge inv., Lorentz inv. e che contenga al più 2 derivati di A_μ ?

Sì:

$$I = \theta \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho})$$

$$= 4\theta \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr}(\partial_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\rho + 2i A_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\rho)$$

$$= 4\theta \partial_\sigma \left\{ \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr}(A_\rho \partial_\mu A_\nu + \frac{2i}{3} A_\rho A_\mu A_\nu) \right\}$$

[PASSAGGI IN RACCONTO]

cioè I è una "derivata totale"

→ non modifica le equazioni del moto

Ma quantisticamente è un termine importante.
Viene chiamato "θ-term".

$$A_\mu = A_\mu^a t_R^a$$

↑

possiamo prendere qualsiasi R

oppure usare i generatori astratti T^a

usiamo la normalizz.
 $\text{tr} t_R^a t_R^b = \delta^{ab}$

$$[\text{tr} t_R^a = 0]$$

Eq. del moto:

$$\delta S = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu})$$

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu + i[A^\mu, \delta A^\nu] - i[\delta A^\mu, A^\nu] \quad (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left(F_{\mu\nu} \left(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu + i[A^\mu, \delta A^\nu] - i[\delta A^\mu, A^\nu] \right) \right)$$

Integriamo le parti, buttando via il termine di bordo
(variaz. si annullano agli estremi)

$$\delta S = \frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left[\left(\partial^\mu F_{\mu\nu} + i[A^\mu, F_{\mu\nu}] \right) \delta A^\nu \right]$$

$$\Rightarrow \text{E.O.M.} \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} + i[A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0$$

$\delta S = 0$
variaz.
nelle eq. ehen.
 $\Leftrightarrow$ eq. lapp.

$F_{\mu\nu}$ sta nella rapp. Adj $\Rightarrow$ e.o.m. possono essere scritte:

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (*)$$

$\nearrow$ è COVARIANTE: se A_μ^0 è soluz. di (*),
allora anche $A_\mu^{0'}$ è soluz.

$\nwarrow$ trasformato di A_μ^0 sotto una fib. transf. di gauge

c'è qui elemento dell'ORBITA

di A_μ^0 è soluz.

In aggiunta $F_{\mu\nu}$ soddisfa le IDENTITÀ DI BIANCHI

def. $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$; allora per def. di $F^{\sigma\tau}$

$$D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$$

← non è un'eq. del moto,
ma un'identità che A_μ
soddisfa.

Dalle eq. del moto Andiamo a una CORRENTE CONSERVATA

$$j_\nu = i [A^\mu, F_{\mu\nu}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{e.o.m.}}}{=} -\partial^\mu F_{\mu\nu} \Rightarrow \partial^\nu j_\nu = 0$$

è la
stessa
corrente
che non
tras. applicando
Noether

$$Q = \int d^3x j_0 = - \int d^3x \partial^i F_{i0} \quad i=1,2,3$$

$$= - \oint_{S_\infty^2} d\Sigma^i F_{i0}$$

Sotto transf. di gauge Q trasforma nel seguente modo:

$$Q \mapsto Q' = - \oint_{S_\infty^2} d\Sigma^i U_{(i)} F_{i0}^{(U)} U_{(i)}^{-1}$$

sono transf. di gauge valutate
all' ∞

Richiedendo di limitarsi a transf. di gauge che
tendono a una COSTANTE all' infinito spaziale,

U può essere portata fuori dall'integrale e otteniamo

$$Q \mapsto U Q U^{-1}$$

(transf. in matrice
covariante)

Possiamo quindi def.

$$\Omega_{\chi} = \{ U(x) \mid U(x) \rightarrow 1 \text{ a } |x| \rightarrow \infty \}$$

$$\Omega = \{ U(x) \mid U(x) \rightarrow \text{cost.} \in G \text{ a } |x| \rightarrow \infty \}$$

↑
tali $U(x)$ vengono chiamati

LARGE GAUGE TRANSFORMATIONS

$$\Omega / \Omega_{\chi} \cong G$$

↑
gruppo di simmetria

QUANTIZZAZIONE CANONICA

→ metodo quant. canonica non è straight forward: certe variabili non hanno momenti coniugati e può essere difficile.

- Teoria di YM è una teoria vincolata → DIRAC BRACKETS

- Facciamo un GAUGE FIXING e poi applichiamo la quant. canonica

- $A_0^a = 0$

pta è la componente che non ha un momento coniugato non-triviale
↓
Regole di comm.

$$[A_i^a(\bar{x}, t), A_j^b(\bar{y}, t)] = 0 \quad [F_{0i}^a(\bar{x}, t), F_{0j}^b(\bar{y}, t)] = 0$$

$$[A_i^a(\bar{x}, t), F_{0j}^b(\bar{y}, t)] = i \delta^{ab} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

def. ps. ⇒ non abbiamo stati a norma negativa

Mettendo a zero A_0^a , nascono l'infinit. data dalle sue eq. del moto, che quindi devo imporre a zero: VINCOLI

con d. A_0^a : $(D_i F^{i0})^a = 0$ (GAUSS LAW)

Questa condizione viene imposta sugli stati fisici (potrei farlo quantificando il sist. vincolato)

$(D_i F^{i0})^a |phys\rangle = 0$ ← in particolare quest'eq. uccide le polarizzazioni longitudinali



$\Gamma(\alpha) |phys\rangle = 0 \quad \forall \alpha \text{ transf. di gauge}$

ricordiamoci che vogliamo descrivere particelle con spin ed elicità 1, mentre stiamo usando 4-vettore (polar. long. uccide da gauge fixing)

don $\Gamma(\alpha) \equiv \int d^3x \alpha^a(x) (D_i F^{i0})^a$

Se abbiamo una sim. generata da T , e un camp ϕ che transf. sotto tale simm, allora

$\delta\phi = i[T, \phi]$

qto lo facciamo anche in MQ in es. con rotazioni infinitesime e non. esp.

usiamo le regole di comm. canoniche

L'operatore che genera la transf. $\delta A_i^a = (D_i \alpha)^a$

e $\tilde{T}(\alpha) = \int d^3x \underline{F^{a0i}} (D_i \alpha)^a$

(cioè $\delta A_i^a = -i [A_i^a, \tilde{T}(\alpha)]$)

$\partial_i (\underbrace{F^{a0i}}_{\text{singoletto}} \alpha^a) = (D_i F^{a0i}) \alpha^a + \underline{F^{a0i}} D_i \alpha^a$



$$\tilde{\Gamma}(\alpha) = \int \partial_i (F^{a0i} \alpha^a) d^3x - \Gamma(\alpha)$$

↑
 generatore delle simmetrie

$$\oint_{S_\infty^2} F^{a0i} \alpha^a = \alpha^a(\infty) Q^a$$

↑
 cost. del vuoto

↑
 si annulla in eq. del vuoto

Legame cost. del vuoto e generatori a mezzo di quantità che si annulla on-shell

$$\delta |\psi\rangle = i \tilde{\Gamma}(\alpha) |\psi\rangle = i \alpha^a(\infty) Q^a |\psi\rangle - i \cancel{\Gamma(\alpha)} |\psi\rangle$$

cambia stato ↑
 fisico $\Rightarrow$ in generale non è ridondante

$= 0$ se $|\psi\rangle$ è uno STATO FISICO

Quando $\alpha^a(\infty) = 0$ allora $|\psi\rangle$ è INVARIANTE ;
 le transf. con $\alpha^a(\infty)$ sono quelle $U(x)$ che $\rightarrow 1$
 in $|x| \rightarrow \infty$ e sono una vera RIDONDANZA.

$$\Omega_* = \{ \text{vere ridondanze} \leftrightarrow \text{transf. di gauge} \}$$

$$\Omega / \Omega_* \cong G \quad \text{è il GRUPPO DI SINTETRIA delle teorie}$$

⊗

$$[\underbrace{x_1 p_2 - x_2 p_1}_{\substack{\Gamma_z \\ \parallel \\ i \delta x_i}}, x_i] = x_1 [p_2, x_i] - x_2 [p_1, x_i] = -i x_1 \delta_{2i} + x_2 \delta_{1i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta x_1 = x_2 \\ \delta x_2 = -x_1 \\ \delta x_3 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{rotazione infinitesima}$$

Algebra di Cartan

Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, la sua SOTTOALGEBRA DI CARTAN $\mathfrak{h}$ è un sottosp. vet. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ t.c.

$$[H_1, H_2] = 0 \quad \forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$$

La dim di $\mathfrak{h}$, $r = \dim \mathfrak{h}$, è detta RANGO di $\mathfrak{g}$

Posso scegliere una base $\mu \mathfrak{h} \subset H^1, \dots, H^r$. Allora in ogni rep R le matrici $h_R^1, \dots, h_R^r$ commutano tra loro e possono quindi essere diagonalizzate simultaneamente.

In particolare, detto $\bar{H}_R = (h_R^1, \dots, h_R^r)$, $\exists$ una base v_i $i=1, \dots, \dim R$ t.c.

$$\bar{H}_R v_i = \bar{\mu}_{R,i} v_i$$

$$\downarrow$$
$$(\mu_{R,i}^1, \dots, \mu_{R,i}^r)$$

$\rightarrow$ dr vettori r -dimensionali detti "WEIGHTS" di R

Al variare di R , qti vettori si distribuiscono in un reticolo r -dimensionale, detto WEIGHT LATTICE $\Lambda_w(\mathfrak{g})$

Questo vale anche μ la rep. Adj in cui i prp vengono chiamati ROOTS $\bar{\alpha}_i$; quante roots abbiamo?

In teoria $\#_{\text{roots}} = \dim R_{\text{Adj}} = \dim \mathfrak{g}$. Tuttavia, alcune roots sono nulle in quanto ci sono r autaretti. relativi

all'autorelle nullo, qti sono $H^1, \dots, H^r$. Quindi il numero di roots non nulle è $\#_{\text{roots}}^{\text{non-0}} = \dim \mathfrak{g} - r$.

Le roots spannano un reticolo, chiamato ROOT LATTICE $\Lambda_{\text{root}}(\mathfrak{g})$

Esempio : $G = A_1$ (alg. di Lie di $SU(2)$; generatori S_x, S_y, S_z)

$r=1$; posso prendere $H = S_z$

$R=2$ (doppietto) $\leadsto$ aut valori di S_z : $\mu_{2,1} = 1/2$ $\mu_{2,2} = -1/2$

$R=3$ (tripletto) $\leadsto$ aut valori di S_z : $\mu_{3,i} \in \{1, 0, -1\}$ $\leftarrow$ rep. Adj
 $\#_{\text{roots}} = 3 - 1 = 2$
non 0

$R=4$ $\leadsto$ aut valori di S_z : $\mu_{4,i} \in \{3/2, 1/2, -1/2, -3/2\}$

Se esponenziamo la sottoalg. di Cartan, otteniamo

un sottogruppo ABELIANO $U(1)^r$
$$e^{i\beta^1 H^1} = e^{i\beta^1 H^1} \dots e^{i\beta^r H^r}$$