

5/10/2021

I NUMERI COMPLESSI

Motivazione: i numeri complessi "nascono", storicamente per poter risolvere l'equazione polinomiale

$$x^2 = -1$$

È ben noto che l'equazione di cui sopra non ammette soluzioni appartenenti ai numeri reali.

Definiamo dunque con i , che denoteremo d'ora in avanti come unità immaginaria un elemento tale.

$$i^2 = -1$$

"Problematice" notiamo subito che se $i^2 = -1$ allora si ha che $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$

→ molteplicità delle radici complesse.

Def Sia i l'unità immaginaria un numero complesso z è un'espressione della forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

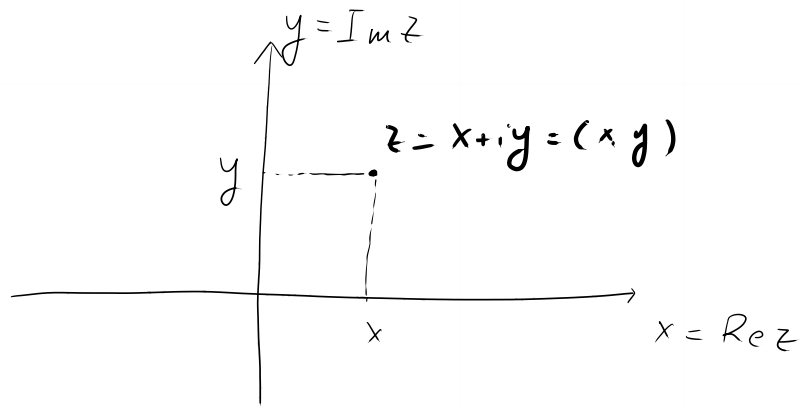
x è detta parte reale di z e può essere denotata con $x = \operatorname{Re} z$

y è detta parte immaginaria di z e può essere denotata con $y = \operatorname{Im} z$

L'insieme dei numeri complessi viene denotato con il simbolo \mathbb{C} che è definito come

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \}$$

I numeri complessi ammettono un'identificazione biunivoca con il piano reale \mathbb{R}^2



Def dato un numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiamo il complesso coniugato di z come

$$\bar{z} = z^* = x - iy = \text{Re } z - i \text{Im } z.$$

Def sia $z \in \mathbb{C}$ definiamo il modulo di z come la quantità

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

NB il modulo di z è sempre una quantità reale e non negativa

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \geq 0$$

NB Notiamo come il modulo di z non sia, né l'altro, che la norma euclidea del vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Numeri complessi in forma trigonometrica

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, consideriamo l'identificazione canonica

$$z \simeq (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

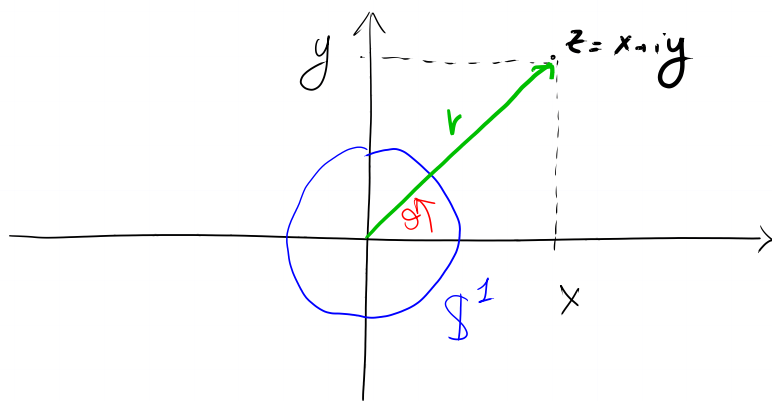
Da ciò che sappiamo del corso di Analisi 2 $\exists!$ $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$
t.c.

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases}$$

ed in particolare possiamo calcolare r e ϑ come funzioni di x ed y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vartheta = \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{se } x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x = 0 \text{ ed } y < 0 \\ \text{indeterminato} & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Possiamo dunque scrivere

$$z = x + iy = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$$

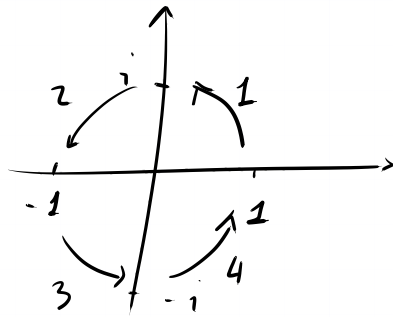
L'espressione di cui sopra è conosciuta come **formulazione trigonometrica di un numero complesso**, r è detto il **modulo** di z , $|z| = r$, mentre ϑ è l'**argomento** di z e lo **ind. char.** con $\vartheta = \arg z$

NB l'argomento di un numero complesso è univocamente definito sse ci restringiamo a considerare $\theta \in [0, 2\pi)$, altrimenti, se ammettiamo che θ sia un valore reale qualsiasi, l'argomento è dunque definito modulo rotazioni di $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

L'esponentiale complesso

Notiamo dapprima le seguenti identità

$$\underbrace{i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1}_{\text{ciclo di 4 termini}}$$



Ne deduciamo dunque che $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$$

[Calcolo integrale]

Sia $\theta \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^m}{m!} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$(i)^{2n} = [(i)^2]^n = (-1)^n$$

$$(i)^{2n+1} = (i)^{2n} i = i(-1)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}}_{=\cos\theta} + i \underbrace{\sum_n \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=\sin\theta} \\
&= \cos\theta + i \sin\theta
\end{aligned}$$

\Rightarrow Ogni elemento di $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$ può essere scritto come $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

OSS $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i \sin\theta} = \cos\theta - i \sin\theta$
 $= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

ES Dimostrare che $\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Potenze e radici di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ sappiamo che $\exists!(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi)$ t.c.

$$z = r e^{i\theta}$$

lunque $\forall n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$, vogliamo calcolare la radice n -esima di z , ossia vogliamo determinare un $w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$w^n = z.$$

Sia dunque $w = s e^{i\varphi}$, abbiamo dunque che

$$w^n = s^n e^{in\varphi} = z = r e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow s^n = r$$

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k}{n}\pi, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

Def Sia $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ l'insieme delle radici n -esime di z è dato dall'insieme

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{C}$$

$$|w_i| = r^{1/n}, \quad \arg w_i = \frac{\theta}{n} + \frac{2i}{n}\pi, \quad i = 1, \dots, n.$$

Def [esponenziale complesso] $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ definiamo

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}_+} \underbrace{e^{iy}}_{\in \mathcal{S}^1}$$

Def [funzioni trigonometriche complesse] $\forall z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Logaritmo di un numero complesso

Sia $z \in \mathbb{C}$, sappiamo che $\exists \theta \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$z = |z| e^{i\theta} = |z| e^{i(\theta + 2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \arg z$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} \log z &= \log(|z| e^{i(\theta + 2k\pi)}) \\ &= \log|z| + i\theta + i2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

\Rightarrow  Il logaritmo complesso non è univocamente definito

Funzioni di variabili reali a valori complessi

Def Una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, con I intervallo è del tipo

$$f(x) = u(x) + i v(x),$$

con $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni reali a valori reali.

Tramite l'identificazione canonica $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ f è identificabile con una curva piana

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I$$

Si ha

- f è continua $\Leftrightarrow u, v$ sono continue
- f è derivabile $\Leftrightarrow u, v$ sono derivabili e

$$f'(x) = u'(x) + i v'(x)$$

- f è integrabile in $[a, b] \subseteq I \iff u$ e v lo sono

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Funzioni periodiche

- Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è T -periodica con periodo $T > 0$ se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- Si definiscono: $1/T$ frequenza, e $\omega = 2\pi/T$ frequenza angolare
- Una funzione T -periodica è univocamente determinata dalla restrizione

$$f \Big|_{[a, a+T)} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

OSS Consideriamo la funzione

$$g(x) = \sin(2x)$$

Notiamo che $\sin(2x) = \sin(2x + \pi)$

Tuttavia è pur vero che $\sin(2x) = \sin(2x + 2\pi)$

allo stesso modo $\sin(2x) = \sin(2x + k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Se ora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione generica T -periodica

$\implies f$ è kT -periodica $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Esempi

- $f(x) = \sin(\pi x)$ è periodica di periodo 2
- $f(x) = \arcsin(\sin x)$ è periodica di periodo 2π
- $f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ——— " ———