

Convergenza puntuale, uniforme ed in energia (in L^2)

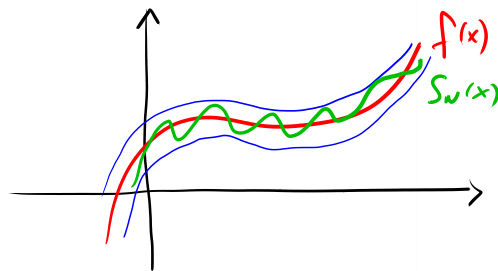
Def Una ruolta N -esima S_N converge puntualmente ad f in $\mathbb{R}$ se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$$

Converge uniformemente se

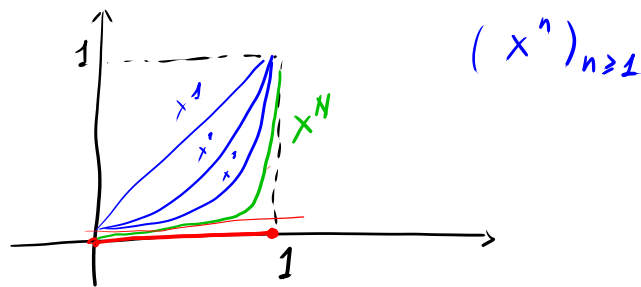
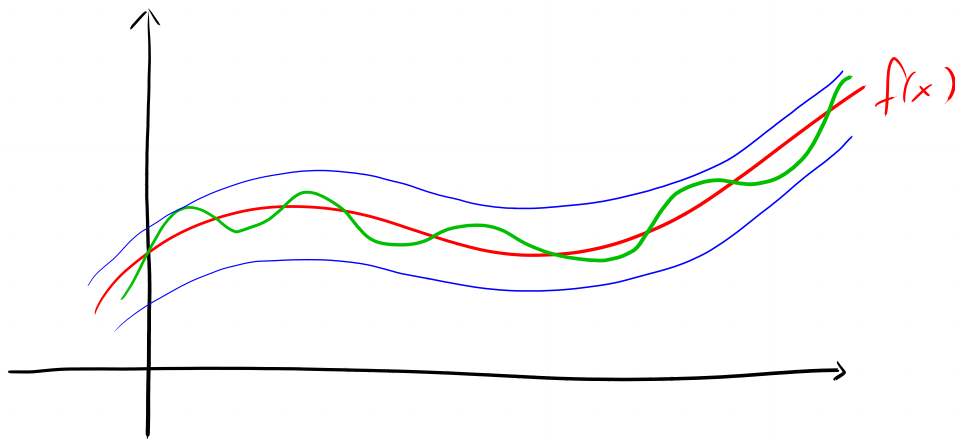
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_N(x) - f(x)| = 0$$

CONVERGENZA UNIFORME > CONVERGENZA PUNTUALE



Mentre S_N converge ad f in energia (o L^2) se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^T |S_N(x) - f(x)|^2 dx}_{\|S_N - f\|_{L^2}^2} = 0$$



$$\begin{array}{ll} \text{Se } x \in [0, 1) & x^n \rightarrow 0 \\ x = 1 & x^n = 1 \end{array}$$

X

Richiami di risultati di Analisi

M-test di Weierstrass

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $\forall n$. Se $\exists (M_n)_n$ in $\mathbb{R}^+$ t.c.

- $\sup_{x \in E} |f_n(x)| < M_n \quad \forall n$
- $\sum_n M_n$ converge

allora $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in E

oss Perché non possiamo applicare l'M-test alla successione $(x^n)_n$ in $[0, 1]$?

$$\sup_{x \in [0,1]} x^n = 1 \equiv M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proviamo a vedere se il secondo criterio dell'M-test è verificato

$$\sum_n M_n = \infty \quad \underline{\underline{\text{No}}}$$

Continuità Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni con $f_n: E (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ continua in $E \quad \forall n$

Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge uniformemente a f in E allora f è continua in E

Integrazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ successione di funzioni $f_n: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrabile in $[a,b] \quad \forall n$

Se $\sum_n f_n$ conv unif a f in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

$$\text{cioè} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(x) dx$$

Derivazione termine a termine

Sia $(f_n)_n$ come sopra, se $\sum_n f_n$ converge puntualmente a f in $I = [a,b]$ e $\sum_n f'_n$ converge uniformemente a g in I allora f è derivabile in I e si ha che $f' = g$

ossia

$$\frac{d}{dx} \sum_n f_n = \sum_n \frac{d}{dx} f_n$$

1° esempio

Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$ e stabilire la regolarità della somma.

Si ha che

$$\circ \left| \frac{\sin(nx)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4} = M_n \quad \forall x \text{ e } \forall n$$

$$\circ \sum_n M_n \text{ è convergente.}$$

$\Rightarrow$ Possiamo applicare il M-test di Weierstrass ed ottenere che la serie

$$\sum_n \frac{\sin(nx)}{n^4} \quad \text{c.v. ad una funzione } f \text{ che è continua in } \mathbb{R}$$

Inoltre sempre utilizzando il M-test si ottiene che la serie $\sum_n \frac{n \cos(nx)}{n^4}$ e $\sum_n \frac{n^2 \sin(nx)}{n^4}$ $\leadsto$ otteniamo dunque che f è $C^2(\mathbb{R})$.

Periodicità della somma di una serie trigonometrica

Se la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad \text{oppure}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$ ad una funzione f allora f è T-periodica.

Dall' H-test possiamo dedurre la seguente

Condizione sufficiente per la conv. uniforme

• Se $|\frac{a_0}{2}| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ è convergente allora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

• Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ è convergente allora $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$ c.u. in $\mathbb{R}$.

Dm Basta osservare che

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

$$|c_n e^{in\omega x}| \leq |c_n|$$

ed applicare l' H-test di Weierstrass.

#

(*) $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$, Determiniamo il periodo di f
la serie f sarà determinata da $(c_n)_n$

Q Data f possiamo determinare $(c_n)_n$ + (*) sia valida?

X

Relazioni tra i coefficienti di una serie trigonometrica e la sua somma

- Se la serie trigonometrica $\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ c.n. in $\mathbb{R}$ ad una f (che è T -periodica e continua), allora

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) dx$$

- Nel caso complesso se $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ c.n. a f allora

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

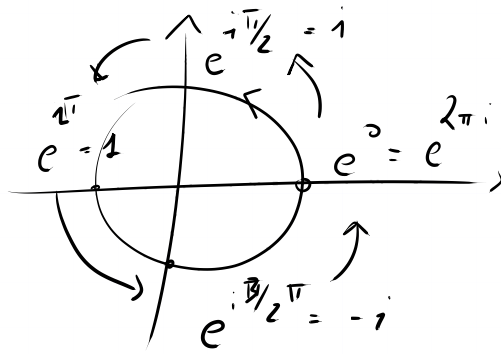
Dim

- Proviamo prima il risultato per $\sum_n c_n e^{in\omega x}$

Risolviamo che

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-in\omega x} dx &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(k-n)\omega x} dx \\ &= \int_0^T e^{i(k-n)\omega x} dx = \begin{cases} \text{se } k=n & = \int_0^T 1 dx = T \\ \text{se } k \neq n & = \frac{1}{i(k-n)\frac{2\pi}{T}} \left[e^{i(k-n)\omega x} \right]_0^T \\ & = \frac{T}{2\pi i(k-n)} \left[\underbrace{e^{i(k-n)\frac{2\pi}{T} T}}_1 - e^0 \right] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(*)



Abbiamo dunque ottenuto che

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega x} e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} T & \text{se } k=n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

Fissiamo dunque $k \in \mathbb{Z}$ e moltiplichiamo la relazione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} = f(x)$$

per $e^{-ik\omega x} = \overline{e^{ik\omega x}}$ ed integriamo tra $-T/2$ e $T/2$

Poiché la serie converge uniformemente a f in $[-T/2, T/2]$

si può integrare termine a termine

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik\omega x} dx &= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_n c_n e^{in\omega x} \right) e^{-ik\omega x} dx \\ &= \sum_n c_n \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(n-k)\omega x} dx = c_k T \end{aligned}$$

otteniamo dunque che, dato k generico in $\mathbb{Z}$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik\omega x} dx$$

OSS 1 Dalla relazione (*) ne deduciamo che, dato lo spazio d'energia

$$L^2 = \left\{ f : \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

ed il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

la famiglia $\left(\frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega x} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ è ortonormale

Continuazione della dimostrazione

• Ricordiamo le formule di Werner

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Si ottiene che

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \sin(k\omega x) dx = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega x) dx = T/2$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega x) \cos(k\omega x) dx = 0 \quad \text{se } k \neq n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega x) \sin(k\omega x) dx = 0 \quad \text{---''---}$$

Possiamo a questo punto considerare la funzione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

e otterremo che

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\omega x) dx = \frac{T}{2} a_k$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(k\omega x) dx = \frac{T}{2} b_k$$

~~///~~