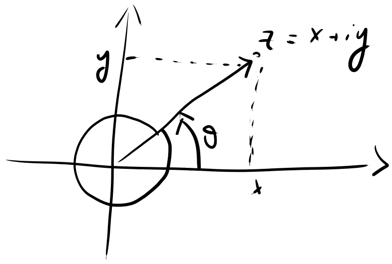
12/10/2021

Esercizio 1 Scrivere in forma esponenziale (e trigonometrica) il numero complesso $z = -1 + i\sqrt{3}$ e calcolare z^4

Numero complesso in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\vartheta}$

$\rho > 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$



Innanzitutto vogliamo determinare il modulo del numero complesso z

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = 1 + 3 = 4$$

$$\rightsquigarrow \quad |z| = 2$$

Otteniamo dunque che il $|z| = 2$

Sappiamo che per esprimere un numero complesso in forma esponenziale dobbiamo identificare un $\vartheta \in [0, 2\pi)$ t.c.

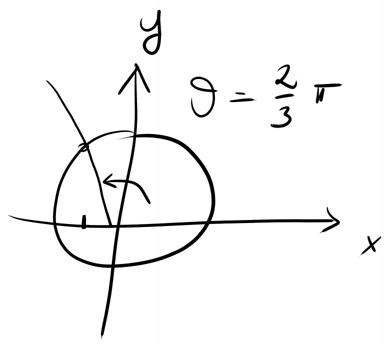
$$z = |z| e^{i\vartheta} \rightsquigarrow e^{i\vartheta} = z/|z|$$

Calcoliamo dunque $z/|z| = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Vogliamo dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -1/2 \\ \sin\vartheta = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$



Abbiamo dunque ottenuto che

$$\boxed{z = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}}$$

Calcoliamo $z^4 = \left(2e^{i2/3\pi}\right)^4 = 2^4\left(e^{i2/3\pi}\right)^4 = 2^4 e^{i8/3\pi}$

$$= 16\, e^{i\frac{8}{3}\pi}$$

Esercizio

Calcoliamo la radice quarta di $z = -2 + i2\sqrt{3}$

Calcoliamo z nella sua forma esponenziale

$$|z|^2 = 4 + 4\cdot 3 = 16$$

Dunque $z/|z| = -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2}{3}\pi}$

Quindi $z = 4\, e^{i\frac{2}{3}\pi}$

Vogliamo dunque trovare un numero complesso

$$w = \rho\, e^{is} \quad , \rho > 0,\ s \in [0, 2\pi)$$

t.c. $w^4 = z = \rho^4 e^{4is}$

$$\begin{cases} \rho^4 = 4 \\ 4s = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$s = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dunque $w_k = \sqrt{2}\ e^{i\pi\left(\frac{1}{6} + \frac{k}{2}\right)}$

$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/6}$, $w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi\frac{4}{6}}$

$w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi\, 7/6}$, $w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\pi\frac{10}{6}}$

Calcoliamo ora $w_4 = e^{i\pi\left(\frac{1}{6}+2\right)} = e^{i\pi/6}\,\underbrace{e^{2i\pi}}_{=1} = e^{i\pi/6}$

$\rightsquigarrow$ $w_4 = w_0$ e procedendo come nel calcolo di

w_1, w_2, w_3 ottengo che

$w_5 = w_1$, $w_6 = w_2$, $w_7 = w_3$ e così via

$\Longrightarrow$ $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ sono le 4 radici di z.

Esercizio Determinare il modulo ed argomento del seguente numero complesso

$$z = \frac{1}{1+i\sqrt{3}}\, e^{i\pi/2}$$

$$\frac{1}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightsquigarrow\ z = \frac{1}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right) e^{i\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\text{questo è un elemento di } S^1} e^{i\pi/2}$$

$\frac{1}{2} = \cos\vartheta$ $\qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\vartheta$ $\qquad \rightsquigarrow\ \vartheta = -\pi/3$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$$

$$z = \frac{1}{2} e^{-i\pi/3} \; e^{i\pi/2} = \frac{1}{2} e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\pi/6}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Modulo} = \boxed{1/2}$$

$$\text{Argomento} = \pi/6$$

$$z = 1/4\,(1 - i\sqrt{3})\, e^{i\pi/2}$$

$$e^{i\pi/2} = i$$

$$= \frac{1}{4}(1 - i\sqrt{3})\, i = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\rightsquigarrow |z| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}}{\cancel{16}}\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1/4}{\sqrt{3}/4}\right) = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}/3\right)$$

$$= \pi/6$$

Esercizio

Provare che dati $z, w \in \mathbb{C}$ si ha che

1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

2) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

Proviamo 1) : $z = a + ib$, $w = c + id$

$$z + w = a + ib + c + id = (a+c) + i(b+d)$$

$$= \begin{cases} \boxed{\overline{z+w}} = \boxed{(a+c) - i(b+d)} \\ \boxed{\bar z + \bar w} = a - ib + c - id = \boxed{(a+c) - i(b+d)} \end{cases} =$$

Proviamo 2):

$$zw = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

$$= \begin{cases} \boxed{\overline{zw}} = (ac-bd) - i(ad+bc) \\ \boxed{\bar z \, \bar w} = (a-ib)(c-id) = (ac-bd) - i(ad+bc) \end{cases} =$$

Esercizio

Provare che $(\bar z)^2 = z^2$ quando z è puro reale o immaginario

1) Se $z \in \mathbb{R}$ allora $\bar z = z$ e quindi l'affermazione è immediata

2) Se z è immaginario allora $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow z^2 = (iy)^2 = i^2 y^2 = -y^2$

$\bar z = -iy \rightsquigarrow (\bar z)^2 = (-i)^2 y^2 = -y^2$

Esercizio

Consideriamo un polinomio a coefficienti reali

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \qquad a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, \dots, n$$

Vogliamo provare che se $z \in \mathbb{C}$ è radice di p allora pure $\bar{z}$ lo è

$$0 = p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

Vogliamo vedere che $p(\bar{z}) = 0$

Calcoliamo $p(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n$

Consideriamo il monomio

$$a_j (\bar{z})^j = a_j \overline{z^j}$$

Per ipotesi $a_j \in \mathbb{R} \rightsquigarrow a_j = \overline{a_j}$

$$= \overline{a_j} \, \overline{z^j} = \overline{a_j z^j}$$

Questo calcolo è valido $\forall j = 0, 1, \dots, n$

Dunque utilizzando l'identità

$$a_j (\bar{z})^j = \overline{a_j z^j}$$

Ne deduco che

$$\begin{aligned} p(\bar{z}) &= a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n (\bar{z})^n \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n} \\ &= \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \\ &= \overline{p(z)} \\ &= \overline{0} \quad = 0 \end{aligned}$$

Esercizio

Siano $z, w \in \mathbb{C}$, dimostriamo che

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$z = \rho e^{i\vartheta} \quad , \quad w = a e^{ib}$$

$$zw = (\rho a) \, e^{i(\vartheta + b)}$$

$$\rightsquigarrow \arg(zw) = \boxed{\vartheta + b}$$

$$\arg(z) = \vartheta \quad , \quad \arg(w) = b$$

$$\Rightarrow \arg z + \arg w = \boxed{\vartheta + b}$$

Esercizio [Formula di De Moivre]

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)$$

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta} \Longrightarrow (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n = \left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{i\vartheta n}$$

$$= \cos(\vartheta n) + i\sin(\vartheta n)$$