13/10/2021

Coefficienti, polinomi e serie di Fourier

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica, localmente integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, integrabile $[-T/2, T/2]$

- I coefficienti

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} \, dx \qquad , n \in \mathbb{Z}$$

si dicono coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $(e^{in\omega x})_{n \in \mathbb{Z}}$. Le ridotte

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

si dicono polinomi di Fourier di f, e, infine

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

Si dia serie di Fourier di f.

- Possiamo definire analogamente a sopra i coefficienti

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) \, dx$$

$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) \, dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

che si dicono coefficienti di Fourier di f e la quantità

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

si dica serie di Fourier di f rispetto al sistema

$$\left(1, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x)\right)_{n\geq 1}$$

Analisi di Fourier (o analisi di frequenza) di una funzione periodica

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodica e loc. integrabile e siano $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $\left(e^{in\omega x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, ossia

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

Si definisce

$$\text{spettro di } f = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Siccome ogni $c_n \in \mathbb{C}$ sappiamo che

$$c_n = |c_n|\, e^{i\varphi_n},$$

dove $(|c_n|)_n \subseteq \mathbb{R}_+$ e $(\varphi_n)_n \subseteq [0, 2\pi)$, ovviamente $\varphi_n = \arg(c_n)$ ed è detto fase di c_n

Si definiscono

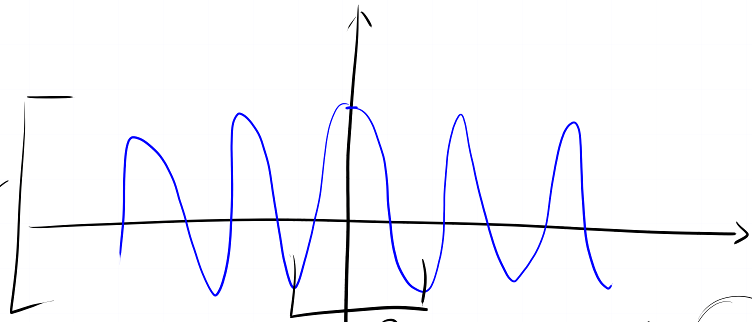
- spettro di ampiezza di f = $(|c_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$
- spettro di fase di f = $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Discussione euristica:

$$a_n \cos(nx)$$

Ampiezze

fasi



→ Periodo di $a_n \cos(nx)$, $2\pi/n$

→ la fase indica la lunghezza del periodo e dunque ne determina la frequenza dell'onda

→ L'ampiezza determina, letteralmente, l'ampiezza dell'onda

L'analisi di Fourier di f consiste nel determinare il suo spettro e quindi la corrispondente serie di Fourier.

La sintesi consiste invece nel ricostruire f attraverso la sua serie di Fourier

$$\underline{\text{Analisi}} : \quad f \longmapsto (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\underline{\text{Sintesi}} : \quad (c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x} \overset{?}{\longrightarrow} f$$

Problema Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e loc. int. allora è determinato il suo spettro e quindi la sua serie di Fourier. Viceversa, dato lo spettro di f la serie di F. di f converge in qualche senso? Qualora converga, converge ad f?

Esempi: Determinare le serie di F. delle seguenti funzioni 2π-per

a) $f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x^2$

Programma del corso

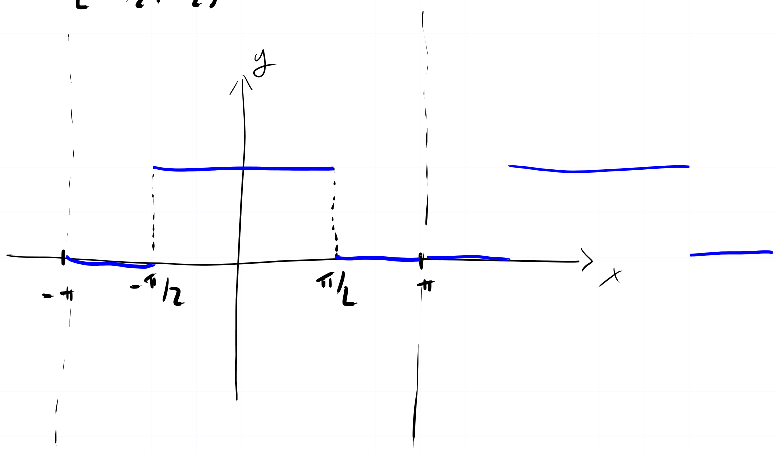
Discutere

- la convergenza puntuale
- la convergenza uniforme
- la convergenza in energia

delle serie di Fourier.

Esempio a)

$$f(x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2)}(x) \qquad -\pi \le x \le \pi$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } [-\pi, -\pi/2] \\ 1 & \text{in } [-\pi/2, \pi/2) \\ 0 & \text{in } [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

ed estesa periodicamente in tutto $\mathbb{R}$

Abbiamo dunque $T = 2\pi$, $\omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = 1$$

Per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,dx =$$

$$(\sin(nx))' = \cos(nx)\cdot n$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(nx)\, dx$$

$$\equiv 0 \qquad \forall\, n \geq 1$$

Abbiamo dunque ottenuto la serie di F. di f in forma reale

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) .$$

__OSS__ Possiamo scrivere la serie in forma complessa utilizzando le relazioni

$$\begin{cases} c_0 = a_0/2 = 1/2 \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \frac{1}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) = c_{-n} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

Esempio 6

$f(x) = x \qquad -\pi \leq x \leq \pi$ estesa periodicamente

Abbiamo che $\quad T = 2\pi, \; \omega = 1$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$$

per $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{x}{\overset{\parallel}{f(x)}} \cos(nx)\, dx = 0$$

siccome $x \mapsto x\cos(nx)$ è dispari

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

Integriamo per parti ed otteniamo

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left[-x\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\pi\cos(n\pi)\right) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Otteniamo dunque la serie di F. per f

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx) .$$