Esercizio 1

Determinare e rappresentare sul piano di Gauss l'insieme dei $z \in \mathbb{C}$ t.c.

1) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{i\bar{z}}\right) \geq 0$

$z = x + iy$

$$\frac{z}{i\bar{z}} = \frac{x+iy}{i(x-iy)} = \frac{x+iy}{(y+ix)} \cdot \frac{(y-ix)}{(y-ix)} = \frac{2xy + i(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$$

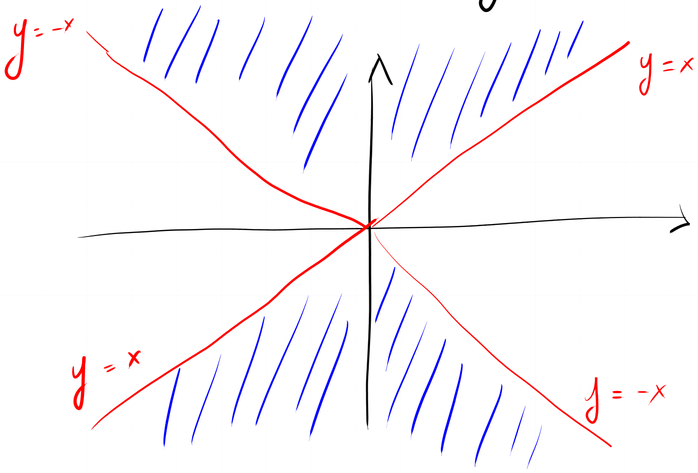
$$= \frac{2xy}{x^2+y^2} + i \, \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

Voglio identificare i $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Im}\left(z/i\bar{z}\right) \geq 0$ o equivalentemente voglio identificare gli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c.

$$\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \geq 0 \iff y^2 \geq x^2$$

$$\iff |y| \geq |x|$$

$$= \begin{cases} y \geq x & \text{se } y \geq 0, \; x \geq 0 \\ -y \geq x & \text{se } y < 0 \quad x \geq 0 \\ y \geq -x & \text{se } y \geq 0 \quad x < 0 \\ -y \geq -x & \text{se } y < 0 \quad x < 0 \end{cases}$$



La zona in blu rappresenta l'insieme soluzioni nel piano di Gauss

2) $z^3 |z| = i\bar{z}$

$z = \rho e^{i\vartheta} \rightsquigarrow z^3 = \rho^3 e^{i3\vartheta}$

$|z| = \rho$

$i\bar{z} = i\rho e^{-i\vartheta} = e^{i\pi/2}\rho \, e^{-i\vartheta} = \rho \, e^{i(\frac{\pi}{2}-\vartheta)}$

Risolviamo l'equazione sopra utilizzando tale sostituzione col ottaniamo che

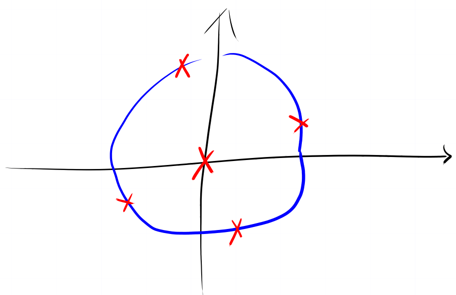
$$\rho^4 e^{i3\vartheta} = \rho \, e^{i(\frac{\pi}{2}-\vartheta)}$$

Risolviamo dunque il sistema

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho \\ 3\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta + 2k\pi \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

1) $\rho = 0 \rightsquigarrow z = 0$ è soluzione

2) $\rho = 1 \implies \vartheta = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \quad \forall k = 0,1,2,3$



I punti in rosso rappresentano l'insieme di soluzioni

Esercizio

Si ponga $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) = \frac{z}{\bar{z}-1}$. Si determini la controimmagine $f^{-1}(A)$ dove

$$A = \{ w \in \mathbb{C} : |w| = 1 \}$$

Vogliamo determinare l'insieme soluzione

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |f(z)| = 1 \}$$

$$|f(z)| = \left| \frac{z}{\bar{z} - 1} \right|$$

$$1 = |f(z)| = |f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)} = \frac{z}{\bar{z}-1} \cdot \overline{\left(\frac{z}{\bar{z}-1} \right)}$$

$$= \frac{z}{\bar{z}-1} \cdot \frac{\bar{z}}{z-1} = \frac{z \cdot \bar{z}}{z\bar{z} - \bar{z} - z + 1} \qquad z = x + iy$$

$$= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2 - x + \cancel{iy} - x - \cancel{iy} + 1} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x+1}$$

Abbiamo dunque dedotto l'equazione

$$1 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-2x+1} \iff \cancel{x^2}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2x+1$$

$$\hookrightarrow x = 1/2$$