Geometria 3 — Topologia

Foglio di esercizi 1

Anno accademico 2021-2022
14/10/2021

1) Sia $A \subset X$ un sottospazio topologico. Mostrare che se A è chiuso in X e $B \subset A$ è chiuso in A allora B è chiuso in X. Mostrare con un controesempio che non si può togliere l'ipotesi "A chiuso in X".

2) Sia $A \subset X$ un sottospazio topologico. Mostrare che se A è aperto in X e $B \subset A$ è aperto in A allora B è aperto in X. Mostrare con un controesempio che non si può togliere l'ipotesi "A aperto in X".

3) Dimostrare che la famiglia degli intervalli semiaperti $[a, b[$ per ogni $a < b$, è base per una topologia su R (detta *topologia degli intervalli aperti a destra*). Denotiamo questo spazio con R_l (retta di Sorgenfrey). Mostrare che gli aperti Euclidei sono aperti in R_l, ma che non vale il viceversa.

4) Per ogni $A \in M_n(R)$ poniamo $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)}$. Mostrare che questa è una norma su $M_n(R)$, e scriverla esplicitamente ($\operatorname{tr} A$ è la traccia di A, somma delle entrate sulla diagonale principale). Mostrare che esiste un'isometria tra $M_n(R)$ con la distanza indotta da tale norma, e R^{n^2} con la distanza Euclidea.

5) Consideriamo $M_n(R)$ con la topologia Euclidea (indotta dalla norma dell'esercizio precedente). Mostrare che

(a) $\mathrm{GL}_n(R)$ è aperto in $M_n(R)$;

(b) $\mathrm{SL}_n(R)$ è chiuso;

(c) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono chiusi.