Stabilità di sistemi lineari a tempo discreto

Equazione di Lyapunov

Sistemi Dinamici

a.a. 2021/22

Es. 1 Sistema LTI autonomo

$$x(k+1) = 2\,x(k)$$

$A = 2 \quad \Leftarrow \quad \Lambda_A = \{+2\} \quad |\lambda| > 1$

$A^k \to \infty$ sistema instabile!

Analisi con le funzioni di Lyapunov $\longrightarrow$

Stato di equilibrio

$$x(k+1) = 2x(k) \rightarrow \bar{x} = 2\bar{x} \qquad \bar{x} = 0$$

Funzione di Lyapunov $\rightarrow V(x) = x^2$

$$V(\bar{x}) = 0 \quad \checkmark$$

$$V(x) > 0 \quad x \neq \bar{x} \quad \checkmark$$

$$\Delta V(x) = 4x^2 - x^2 = 3x^2 > 0 \;!!$$

equilibrio instabile!

è sistema CT !

$\bar{x} = 0$ stato di eq. instabile $\Longrightarrow$ sistema instabile

Utilizza l'equazione di Lyapunov:

$x(k+1) = A\, x(k)$ $\qquad A = +2$

$A^T P A - P = -Q$ $\qquad$ NB $\quad V(x) = x^T P x$

$\Delta V(x) = -x^T Q x$

1° modo $\rightarrow$ scelgo Q ~~d~~def. pos. e simmetrica

$Q = +1$

$A = +2$

$P = p$

$$A^T P A - P = -Q \longrightarrow 4p - p = -1$$

$$p = -\frac{1}{3}$$

$V(x)$ def. negativa!

$Q = +1 \Rightarrow P = -\frac{1}{3}$ $V(x)$ def. neg.

$\Delta V(x)$ def. neg.

Teorema Eq. di Lyapunov $\Rightarrow$ il sistema
[L3-p12]
NON è esint. stabile

Metodo diretto di Lyapunov $\Rightarrow$ $V(x)$ non è def. pos.
[L3-p29]
NON si può dire nulla

2° modo $\rightarrow$ assegno P simmetrica e def. pos
e calcolo Q

$\Updownarrow$

assegno $V(x)$ def. pos. e valuto
$\Delta V(x)$

Così posso utilizzare il metodo
Diretto di Lyapunov

$x(k+1) = 2x(k)$ $\quad A = 2 \quad$ scelgo $P = 2$

$\Downarrow$

$\bar{x} = 0$ noto di equilibrio $\quad V(x) = x^T P x = 2x^2$

$V(\bar{x}) = 0$ ✓

$V(x) > 0 \quad \forall x \neq \bar{x}$ ✓

$A^T P A - P = -Q$

$8 - 2 = -Q$

$Q = -6 \quad \Rightarrow \quad \Delta V(x) = -x^T Q x = 6x^2$

def. pos. !!

Riassumendo

$V(x) = 2x^2$ def. pos. in $\bar{x} = 0$

$\Delta V(x) = 6x^2$ def. pos. in $\bar{x} = 0$

$\Rightarrow$ sulla base di L3-p29 $\Rightarrow$ $\bar{x}$ stato di eq. instabile

è sistema LTI $\Rightarrow$ sistema instabile

Es 2 sistema LTI a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j \qquad |\lambda_{1,2}| = 1$$

sistema
sempl. stabile

Utilizzo l'equazione di Lyapunov

Verificare che se si assegna Q def. positiva e si risolve l'eq. di Lyapunov per la matrice P NON si trova P def. positiva e quindi si può concludere solo che il sistema NON è asintoticamente stabile.

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} u \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

Verificare che $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è stato di equilibrio per il sistema, con $\bar{u} = 0$

Assegno P definita positiva

$$P = I \Rightarrow V(x) = x^T P x = x^T x = x_1^2 + x_2^2$$

$$V(\bar{x}) = 0$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq \bar{x}$$

Risolvo l'equazione di Lyapunov cercando Q

$$A^T P A - P = -Q \Rightarrow A^T A - I = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -Q$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

$$\left.\begin{array}{l} V(x) = x^T P x \\ A^T P A - P = -Q \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta V(x) = -x^T Q x$$

con $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Allora posso concludere che

$\Delta V(x)$ è semidef. negativa $\rightarrow$

$\Delta V(x)$ è semidef. negativa

$\Downarrow$

stato di equilibrio $\bar{x}$

è instabile $\Leftarrow$ il sistema è LTI

$\Downarrow$

sistema instabile!

Risoluzione della equazione di Lyapunov

$$A^T P A - P = -Q$$

Casi particolari

Es.

$$x(k+1) = A\,x(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

AB $\lambda_1 = +\frac{1}{3}$

$\lambda_2 = +3$ $|\lambda_2| > 1$

$\Downarrow$

sistema instabile

Voglio risolvere l'eq. di Lyapunov per P incognita con Q assegnata e def. pos.

$$Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix}$$

$$A^T P A - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_{12} \\ p_{12} & p_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T P A - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{8}{9} p_1 & \frac{1}{3} p_1 \\ \frac{1}{3} p_1 & p_1 + 8 p_2 + 6 p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Nessuna soluzione!

NB La soluzione dell'equazione di Lyapunov non esiste oppure non è unica se tra gli autovalori della matrice A esistono λ_1 ed λ_2 tali che

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$