Omeomorfismi

Def Siano X e Y spazi topologici. Un'applicazione $f: X \longrightarrow Y$ è detta <u>omeomorfismo</u> se:

1) f è biiettiva
2) f e f^{-1} sono continue

Se esiste un omeomorfismo $f: X \longrightarrow Y$ diremo che X e Y sono <u>omeomorfi</u>.

OSS Equivalentemente, $f: X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo se e solo se

1) f biiettiva
2) f continua e aperta.

OSS Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ sono omeomorfismi allora $g \circ f: X \to Z$ e $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ sono omeomorfismi.

$id_X: X \longrightarrow X$ è omeo.

OSS $f: X \to Y$ omeo $\Longrightarrow$ f continua e biiettiva

$\not\Longleftarrow$

Def Siano X e Y spazi top. Un'applicazione continua $f: X \to Y$ è detta <u>immersione</u> se la restrizione $f| : X \to f(X)$ è un omeomorfismo, dove $f(X) \subset Y$ ha la topologia di sottospazio di Y.

Se esiste un'immersione $f: X \to Y$ allora diremo che X si immerge in Y e potremo identificare X col sottospazio $X' = f(X) \subset Y$.

Un'immersione si denota anche $f: X \hookrightarrow Y$.

<u>OSS</u> $f: X \to Y$ immersione $\Rightarrow$ f continua e iniettiva
$\not\Leftarrow$

<u>OSS</u> 1) $f: X \hookrightarrow Y$ immersione suriettiva $\Rightarrow f$ omeo.
2) $A \subset X$ sottospazio $\Rightarrow i: A \hookrightarrow X$ immersione.
3) $f: X \to Y$ immersione e $A \subset X \Rightarrow f|_A : A \hookrightarrow Y$ immersione

<u>Esempi</u> 1) $j: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ con $n < m$,
$j(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$
immersione canonica. Infatti:
j continua e iniettiva e $j(B_{\mathbb{R}^n}(x; r)) = B_{\mathbb{R}^m}(j(x); r)$
$\Rightarrow j| : \mathbb{R}^n \hookrightarrow j(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ omeo.

2) $j|_{B^n} : B^n \hookrightarrow B^m$ immersione, $n < m$

3) $j|_{S^n} : S^n \hookrightarrow S^m$ immersione, $n < m$
(qui usiamo $j: \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$)

Poniamo:

$$C(X,Y) \overset{def}{=} \{ f : X \to Y \mid f \text{ continua} \} \neq \emptyset$$

$$C(X) \overset{def}{=} C(X, \mathbb{R}) \neq \emptyset$$

$$\mathrm{Homeo}(X,Y) \overset{def}{=} \{ f : X \to Y \mid f \text{ omeo} \} \quad (\text{può essere } \emptyset)$$

$$\mathrm{Homeo}(X) \overset{def}{=} \mathrm{Homeo}(X,X) \neq \emptyset$$ (è un gruppo rispetto a composizione).

Continuità negli spazi metrici

Teorema Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

Un'applicazione $f : X \to Y$ è continua $\iff$

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ t.c.

$$d_Y(f(\xi), f(x)) < \varepsilon \quad \forall \xi \in X \text{ con } d_X(\xi, x) < \delta.$$

Dim Segue subito dal teorema precedente (i.e.) usando le bocce aperte come basi di intorni.

Esempio $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua $\iff$

$\forall x \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ t.c.

$|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall \xi \in [a,b]$ con $|\xi - x| < \delta$,

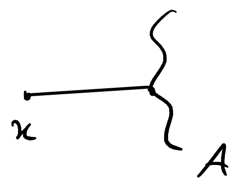
come si impara nei corsi di Analisi Matematica.

Def Sia (X,d) uno spazio metrico e $A \subset X$.

Definiamo

$$d(x,A) = \inf \{ d(x,a) \mid a \in A \}$$

distanza tra x e A



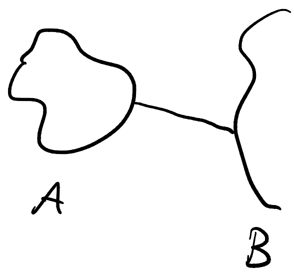
Per $A, B \subset X$ poniamo

$$d(A,B) = \inf \{ d(a,b) \mid a \in A, b \in B \}$$

distanza tra A e B

OSS $x \in A \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; d(x,A) = 0$ Es. $d_{\mathbb{R}}(0,]0,1[) = 0$

$A \cap B \neq \emptyset \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; d(A,B) = 0$



Teorema Sia (X, d) spazio metrico e $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Allora la funzione

$$\delta_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\delta_A(x) = d(x, A)$$

è continua.

Dim $\forall\, a \in A$, e $\forall\, \xi, x \in X$:

$$\delta_A(\xi) \leq d(\xi, a) \leq d(\xi, x) + d(x, a) \implies$$

$$\delta_A(\xi) \leq d(\xi, x) + \delta_A(x) \implies$$

$$\delta_A(\xi) - \delta_A(x) \leq d(\xi, x).$$

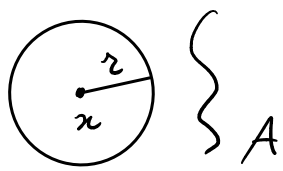
Scambiando ξ e x si ha:

$$|\delta_A(\xi) - \delta_A(x)| \leq d(\xi, x)$$

Pertanto $|\delta_A(\xi) - \delta_A(x)| < \varepsilon$ se $d(\xi, x) < \varepsilon$.

Teorema Sia $A \subset X$ chiuso, $A \neq \emptyset$. Allora
$$d(x, A) = 0 \iff x \in A.$$

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ ovvio



$\boxed{\Rightarrow}$ $x \notin A \implies x \in X - A$ aperto $\implies B(x; r) \subset X - A$, per un certo $r > 0$ $\implies d(x, a) \geq r > 0 \quad \forall\, a \in A$
$\implies d(x, A) \geq r > 0$.

Isometrie

Def Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

1) Un'applicazione $f : X \to Y$ è detta <u>applicazione isometrica</u> se
$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$
$\forall\, x_1, x_2 \in X$.

2) $f : X \to Y$ è detta <u>isometria</u> se è isometrica e suriettiva.

Teorema Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : X \to Y$ applicazione <u>isometrica</u>. Allora f è un'<u>immersione</u>. Se f è un'isometria allora $f^{-1} : Y \to X$ è un'isometria e quindi f è un <u>omeomorfismo</u>.

Dim Non è restrittivo assumere f <u>suriettiva</u>.

f è <u>continua</u>:

$x \in X$, $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow$ per $\delta = \varepsilon$ si ha
$$d_X(\xi, x) < \varepsilon \implies d_X(\xi, x) = d_Y(f(\xi), f(x)) < \varepsilon$$

f è <u>iniettiva</u>: $f(x_1) = f(x_2) \implies$
$$0 = d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \implies x_1 = x_2.$$

f^{-1} <u>isometria</u> ($\Rightarrow f^{-1}$ continua): immediato $\boxed{E}$