$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r \qquad 2 < x_n < 3$$

crescente $\qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = e = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}^+\right\}$

$$2 \underset{\neq}{\leq} e \underset{\neq}{\leq} 3$$

e base naturale dell'esponenziale

logaritmo

Scrittura di un numero reale (decimale o in base $b \in \mathbb{N}$ $b \geq 2$)

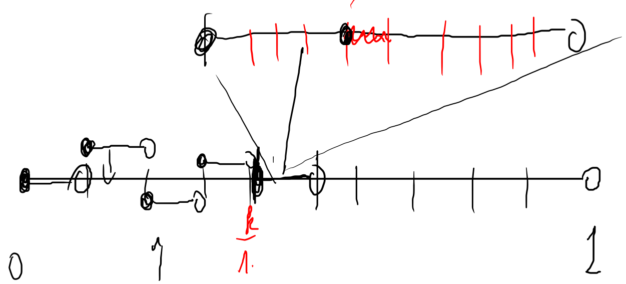
$x \in \mathbb{N}$ $\qquad x = \sum_{k=0}^{n} a_k \, 10^k \qquad a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \qquad a_n \neq 0$

$x \in \mathbb{R}^+$ $\qquad x = [x] + (x)$ ← mantissa $\qquad 0 \leq (x) < 1$

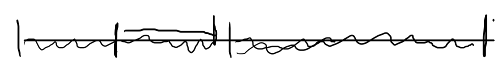
↑ parte intera

$$\left[\frac{k}{10} + \frac{j}{100}, \frac{k}{10} + \frac{j+1}{100} \right[$$

Supponiamo $x \in [0,1[$



$$\left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10} \right[$$



$a_1 \cdot \frac{1}{2} + a_2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots$

$\exists \, k \in \{0, \dots, 9\}$

$x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$

Sia $a_1 \in \{0, \dots, 9\}$ tale che $\quad x \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10} \right[$

$a_2 \in \{ \qquad \}$ " $\quad x \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{100} \right[$

$$X = a_1 \cdot \frac{1}{10} + a_2 \cdot \frac{1}{100} + a_3 \cdot \frac{1}{1000} + \dots \qquad a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 \dots\dots$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \, 10^{-k}$$

$(S_n)_n$ è una successione di numeri reali

$0 \leq S_n < 1 \quad \forall n$

S_n è crescente

quindi esiste $\lim_{n \to +\infty} S_n = X$

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

$x = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$

OSS: Un numero reale x è razionale se e solo se la sua rappresentazione decimale è periodico.

$x = n, 12\overline{345}\,\overline{345}\,\overline{345}$ $\qquad$ $3,\overline{0}$

se x è periodico $\qquad 0,12\overline{345} = \dfrac{12345 - 123}{99000}$

se $x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $\qquad \dfrac{27}{7} = 3 + (..)$ $\qquad 27 : 7 = 3$ Resto 6

$\uparrow \cdot 10$ $\qquad 60 : 7 = 8$ Resto 4

$\dfrac{27}{7} = 3,857142\,8 \ldots$

60

Teorema di Bolzano-Weierstraß

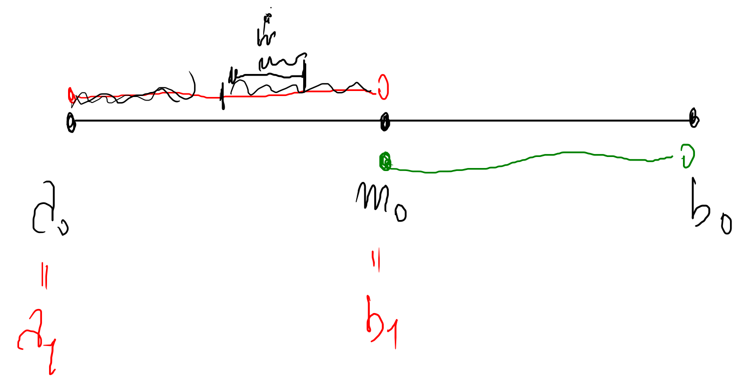
Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{R}$ limitata. Allora esiste una sottosuccessione convergente.

Dim (metodo di bisezione)

Sia $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se E è un insieme finito, esiste un valore $\alpha \in E$ che viene assunto per infiniti indici: prendendo questi indici in ordine crescente ottengo una sottosuccessione costante $x_{n_k} = \alpha \ \forall k$ e $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \alpha$.

Supponiamo E infinito.

E è limitato, esiste $[a,b]$ con $E \subseteq [a,b]$ $\quad a=a_0 \quad b=b_0$



Sia $m_0 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$

$[a_0,b_0] = [a_0, m_0[\, \cup \, [m_0, b_0]$

Sia $E \cap [a_0, m_0[$ infinito, allora poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = m_0$

(Se invece $E \cap [a_0, m_0[$ è finito, allora è infinito $E \cap [m_0, b_0]$; in questo caso poniamo $a_1 = m_0$ e $b_1 = b_0$.

Consideriamo $[a_1, b_1]$.

Per induzione: vogliamo costruire alcune successioni come segue:

$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ $\qquad$ $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 \leq b_0$ $\qquad$ $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

$[a_n, b_n] \cap E$ è infinito, prendiamo $x_{k_n} \in [a_n, b_n] \cap E$ con $k_1 < k_2 < \dots < k_n$

se $[a_n, b_n] \cap E$ è infinito si definisce $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

In questo modo abbiamo definito $(a_n)_n$ limitata crescente

$(b_n)_n$ limitata decrescente

$a_n \leq b_n \quad \forall n \qquad \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \alpha \leq \beta = \lim_{n \to +\infty} b_n$

Poiché $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = (b_0 - a_0) \cdot \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ si ha $\alpha = \beta$.

Inoltre $\quad a_n \leq x_{k_n} \leq b_n \quad \forall n$

$$\begin{array}{ccc} a_n & & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \alpha \end{array}$$

2 carabinieri $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{k_n} = \alpha.$

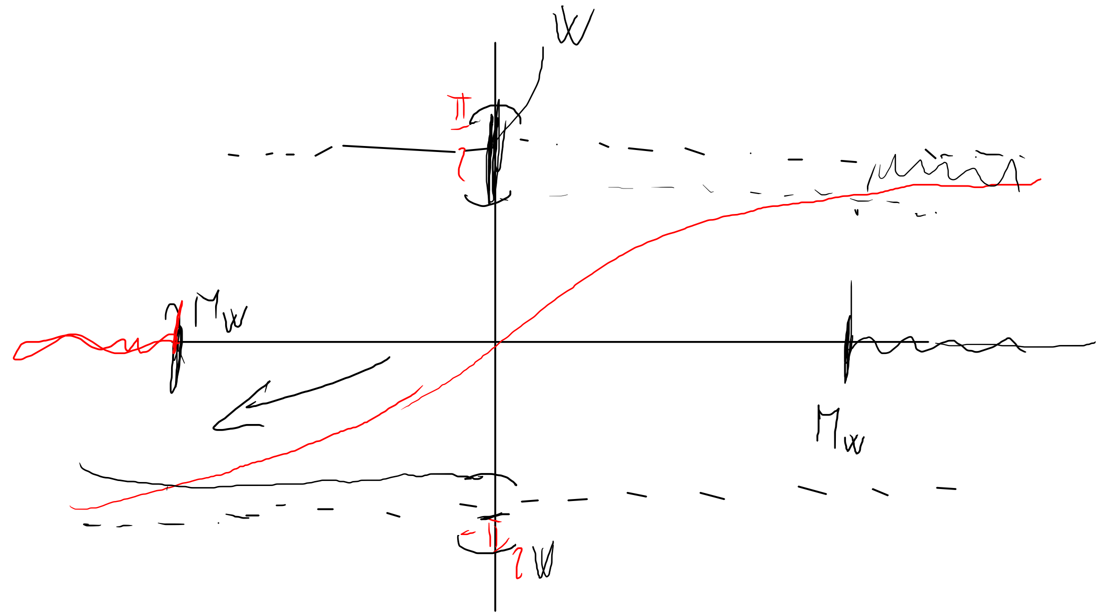
Teorema

Sia $(x_n)_n$ una successione superiormente illimitata in $\mathbb{R}$. Allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ divergente a $+\infty$.

Limiti di funzioni

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$ $\quad$ $\forall W$ intorno di α $\exists\ n_W \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_W$ $x_n \in W$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$



$\forall W$ intorno di $\frac{\pi}{2}$ $\exists\ M_W \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ $x > M_W$ $f(x) \in W$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\forall W$ intorno di $-\frac{\pi}{2}$ $\exists\ M_W \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ $x < M_W$ $f(x) \in W$

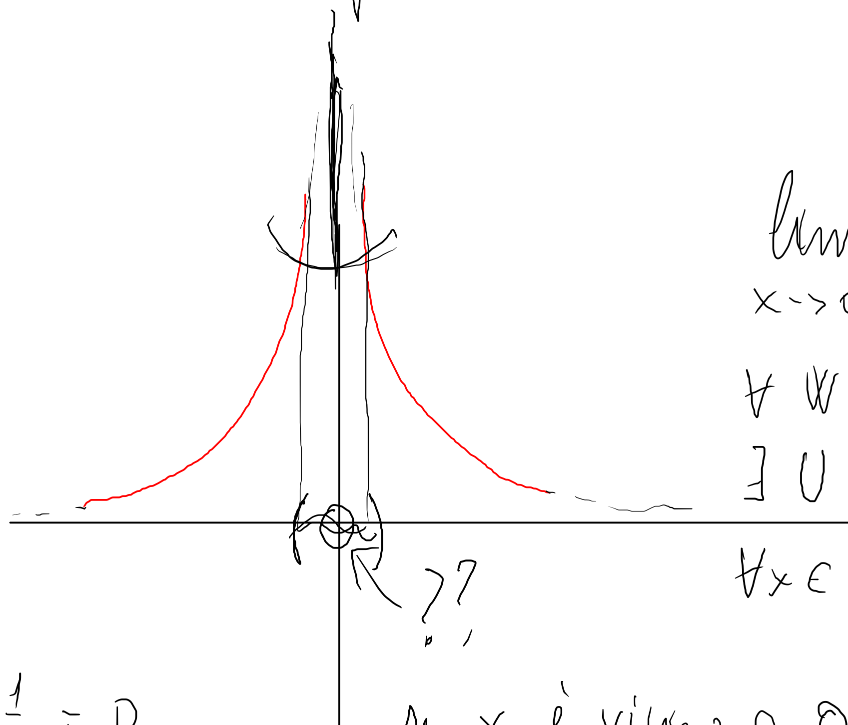
$f(x) = \sqrt{1-x}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-x} = ?$ NON ha significato

il dominio della f non è superiormente illimitato

$]-\infty, 1]$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\forall W$ intorno di $+\infty$

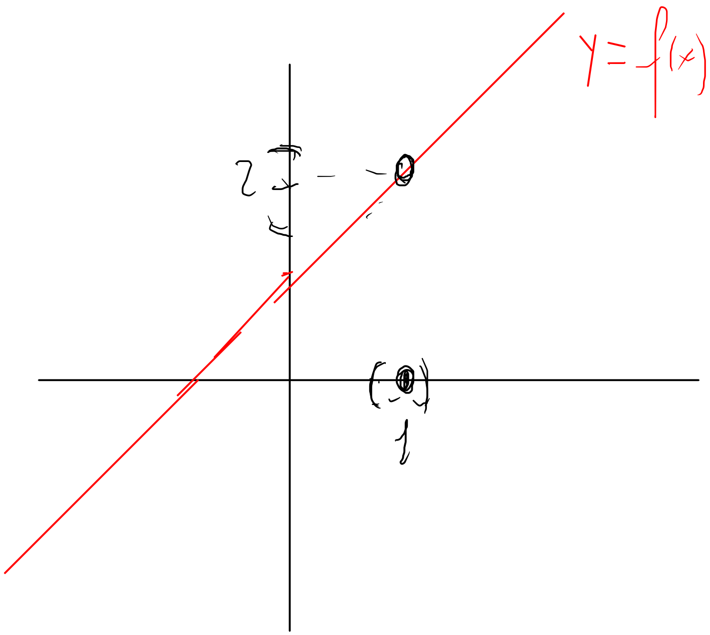
$\exists U$ intorno di 0 tale che

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad x \in U \Rightarrow \frac{1}{x^2} \in W$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

se x è vicino a 0 ?

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $\qquad f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

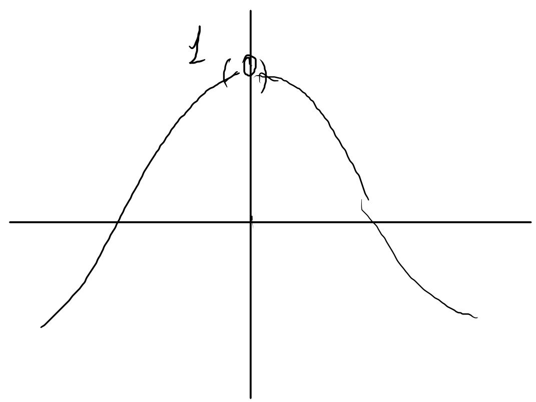


$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

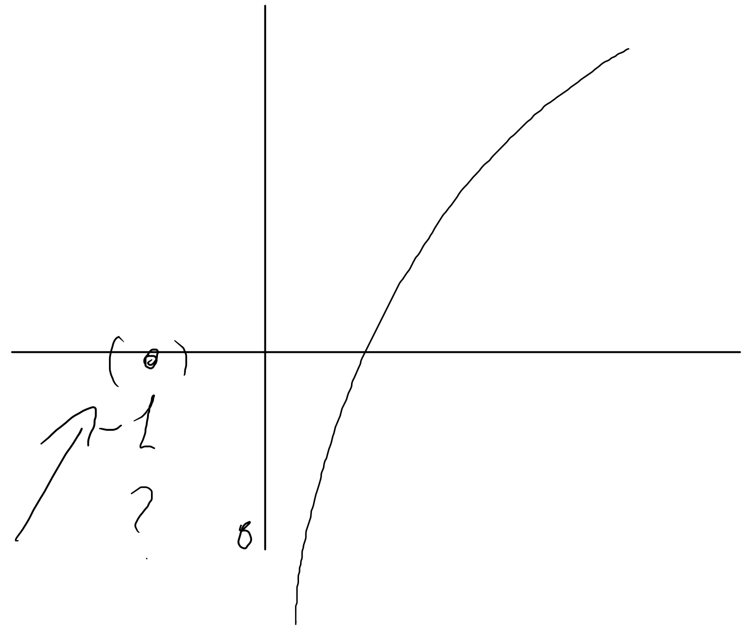
$\uparrow$ L ??



$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

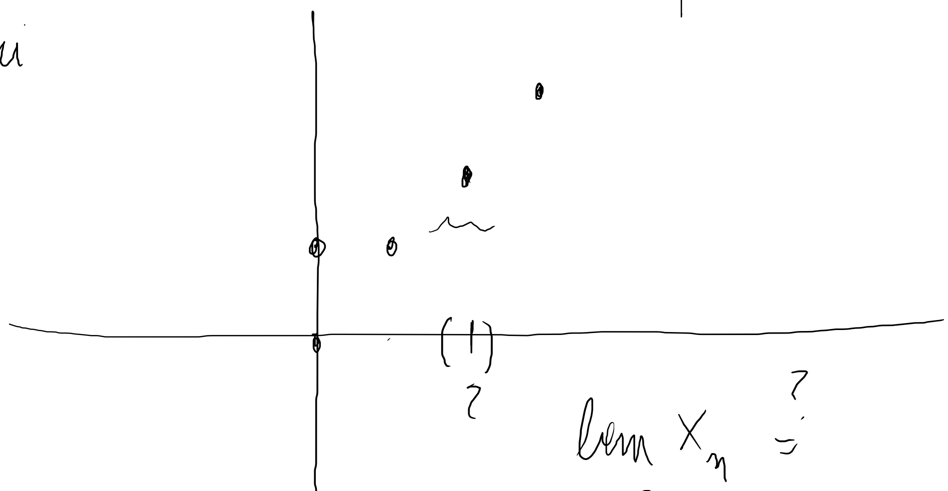
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$\lim_{x \to -1} \log x$ NON HA SIGNIFICATO



x_0

x_n = Fibonacci



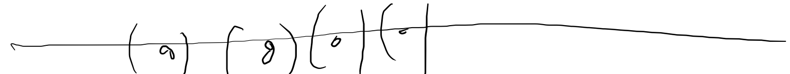
$\lim_{n \to ?} x_n = ?$

Punto di accumulazione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che x_0 è un punto di accumulazione per E se per ogni intorno U di x_0 esiste $x \in U \cap E$ $x \neq x_0$

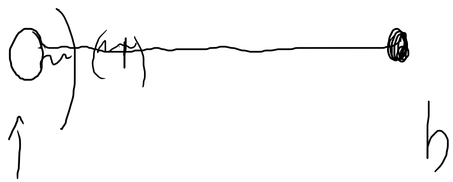
Un punto $x_0 \in E$ ma non di accumulazione per E si dice un punto isolato. Un insieme costituito solo da punti isolati si dice discreto

$\mathbb{N}$ è discreto

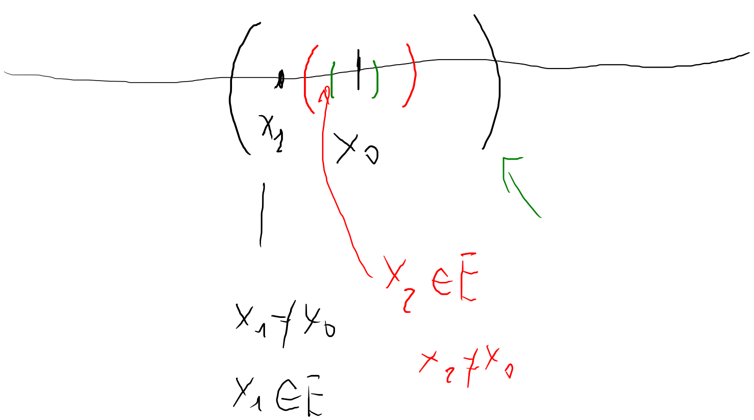


$E = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \}$ è discreto 0 è punto di accumulazione per E

$E = \,]a, b]$ i punti di accumulazione di E sono $[a, b]$



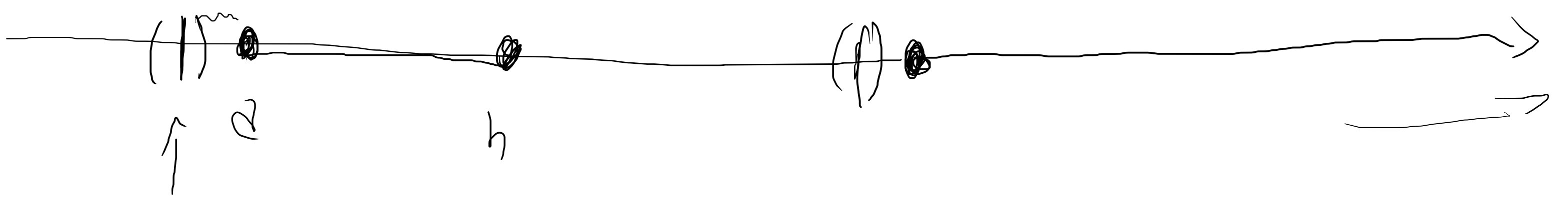
<u>OSS</u>: x_0 è punto di accumulazione per E se e solo se per ogni intorno U di x_0 l'insieme $E \cap U$ è infinito.



Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice chiuso se ogni punto di accumulazione di E appartiene ad E.

OSS: ogni intervallo chiuso è un insieme chiuso

$[a, b]$ $\quad$ $[a, +\infty[$ $\quad$ $]-\infty, b]$ $\quad$ $]-\infty, +\infty[$

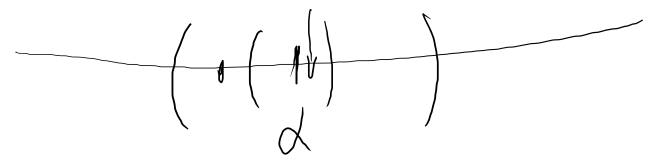


OSSERVAZIONE $E \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α è punto di accumulazione per E se e solo se esiste una successione $(x_n)_n$ $\underbrace{\text{(con } X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ infinito)}}$ tale che $x_n \in E$ $\forall n$ e

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$.

Dim Sia α punto di accumulazione



$B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap E$ è infinito

$B(\alpha, \frac{1}{n}) =]\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}[$

$x_n \in B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap E$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$

$$\begin{array}{ccccc} \alpha - \frac{1}{n} & < & x_n & < & \alpha + \frac{1}{n} \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \alpha & & \alpha \end{array}$$

Sia $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$ $\quad x_n \in E \quad$ $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ infinito

Preso U intorno di α si ha che $\exists\, n_U \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_U$ $x_n \in U\cap E$ l'insieme $\{x_n : n \geq n_U\}$ è infinito.

Es $\quad E = \mathbb{N} \quad \alpha = 1 \quad x_n = 1$ costante $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$

ma 1 non è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.

Diremo chiusura di $\overline{E}$ l'insieme

$E \cup \{\text{punti di accumulazione di } E\} = \overline{E}$

$\overline{]0,1[} = [0,1]$ $\qquad\qquad$ $\overline{B(x_0,r)} = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| \leq r\}$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Un insieme $\boxed{\underline{K \subseteq \mathbb{R}}}$ si dice compatto se è chiuso e limitato

Es: ogni sottoinsieme finito è compatto.

Sia E finito; chiaramente E è limitato (esistono $\max E$ e $\min E$)
E è discreto (non può avere punti di accumulazione per definizione!)

<u>Teorema</u>

Ogni insieme compatto $K \subseteq \mathbb{R}$ ha massimo e minimo.

<u>OSS</u>: Sia $(x_n)_n$ una successione non definitivamente costante.

Sia $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Allora α è l'unico punto di accumulazione dell'insieme $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$