14 ottobre

Regole dei limiti, teorema del confronto, teor. dei Carabinieri continuano ad essere veri

Ad es, se $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, e se $x_0 \in \mathbb{R}$ e' $x_0 \in X'$, allora se $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ e se $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = a + b$$

salvo i casi indefiniti $(a, b) = \begin{cases} (+\infty, -\infty) \\ (-\infty, +\infty) \end{cases}$

regola prodotto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = a b$$

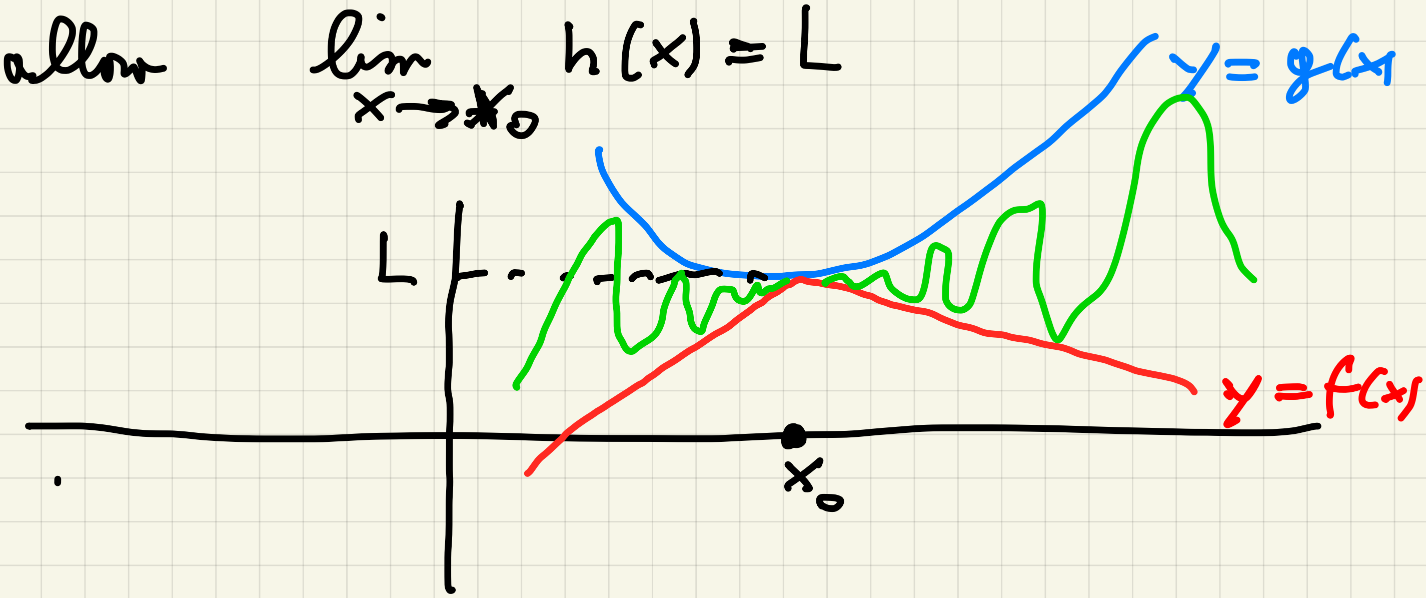
salvo i casi indefiniti $(a, b) = \begin{cases} (0, \pm\infty) \\ (\pm\infty, 0) \end{cases}$

Teor (Carabinieri) Se $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

$f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\forall x \in X$

e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$,

allora $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$



$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \iff \lim_{x \to 0} |\sin x| = 0$$

si tratta di dimostrare che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } 0 < |x| < \delta_\varepsilon \implies |\sin x| < \varepsilon}$$

$$|\sin x| = \big|\, |\sin x| - 0 \big| = \big|\, |\sin x| \big|$$
$$= |\sin x|$$

Dimostriamo che $\lim_{x\to 0} |\sin x| = 0$

Utilizzerò la disuguaglianza

$$(*) \quad 0 \le |\sin x| \le |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Supponendo che $(*)$ sia vera

da $\lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0$ allora

$\lim_{x\to 0} |\sin x| = 0$ per i Carab.

Dimostriamo $(*)$. Osserviamo che per

$|x| \ge \frac{\pi}{2}$ la $(*)$ è ovviamente

vera perché $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|$

Consideriamo

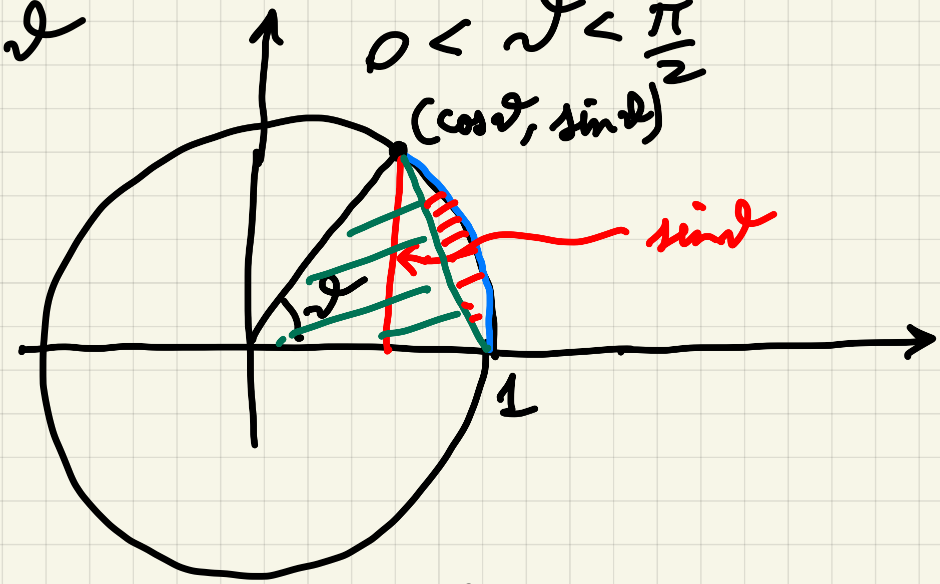
$$|\sin x| \le |x| \qquad \text{per } |x| < \frac{\pi}{2}$$

E' sufficiente dimostrare

$$\sin x \le x \qquad \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \vartheta \le \vartheta \qquad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$\sin\vartheta \le \vartheta$ $\quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$



Chiamo T il triangolo.

$$\text{Area } T = \frac{\sin\vartheta}{2}$$

$$\text{Area settore circolare} = \frac{\vartheta}{2}$$

Pertanto per $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$

$$0 < \sin\vartheta < \vartheta$$

Conclusione. Abbiamo dimostrato

$$0 \le |\sin x| \le |x| \quad \forall\ 0 \le x .$$

Dimostriamo che

$$0 \le |\sin x| \le |x| \quad \forall \quad x \le 0$$

$$x \le 0 \implies x = -u \quad \text{con} \quad u \ge 0$$

$$|\sin x| \le |x| \iff |\sin(-u)| \le |\cancel{-}u|$$

$x \leq 0 \implies x = -u$ con $u \geq 0$

$$\underset{x \leq 0}{|\sin x| \leq |x|} \iff |\sin(-u)| \leq |\cancel{-}u| \quad u \geq 0$$

$$|\sin(-u)| = |-\sin u| = |\sin u|$$

$$\underset{\text{per } u \geq 0}{|\sin(-u)| \leq |-u|} \iff |\sin u| \leq |u| \quad \text{per } u \geq 0$$

e quest'ultima è vera

$\sin(0) = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin(0),$

così $\sin(x)$ è continua in 0.

Dimostriamo ora che

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos(0)$$

Per dimostrare questo è sufficiente restringere $\cos(x)$ nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \iff \lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$$

$$0 \leq 1-\cos x = \left(1-\sqrt{1-\sin^2 x}\right) \frac{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \sin^2 x)}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$= \sin^2 x \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}}}_{\leq 1}$$

$$\leq \sin^2 x$$

Conclusione. In $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale

$$0 \leq 1-\cos x \leq \sin^2 x$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}} \leq 1 \qquad \cdot \sin^2 x$$

$$\sin^2 \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}} \leq \sin^2 x$$

In $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale

$$0 \leq \underbrace{1-\cos x}_{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 0}} \leq \underbrace{\sin^2 x}_{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0}\cos x = 1 = \cos(0)$$

$\cos x$ è continua in 0.

Dimostriamo che $\sin x \in C^0(\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to x_0}\sin(x) = \sin(x_0) \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$x = h + x_0$$

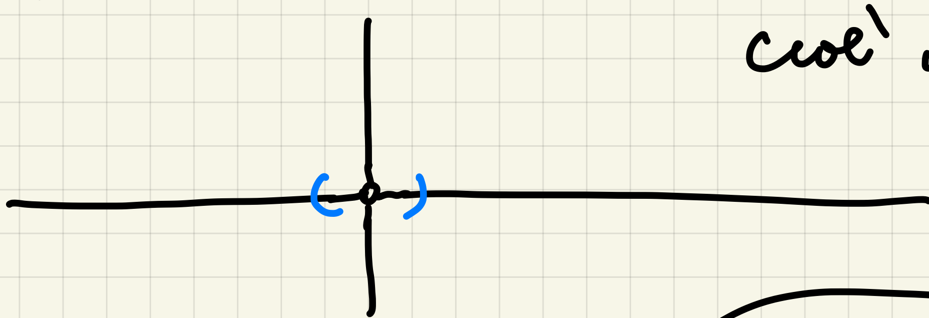
$$\lim_{h\to 0}\sin(h+x_0) = \lim_{h\to 0}\Big(\underbrace{\sin(h)}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 0}}\underbrace{\cos(x_0)} + \underbrace{\cos(h)}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1}}\underbrace{\sin(x_0)}\Big)$$

$$= \sin(x_0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$\frac{\sin x}{x}$ è definita per $x \neq 0$ ~~cioè~~

cioè in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$0 \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})'$

Consideremo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Si ha

$$\sin x \le x \le \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad *$$

Supponendo * vera

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \qquad (1)$$

$1 \xrightarrow{x\to 0} 1$ $\qquad$ $\frac{1}{\cos x} \xrightarrow{x\to 0} 1$

* implica che (1) è vera $\forall$ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

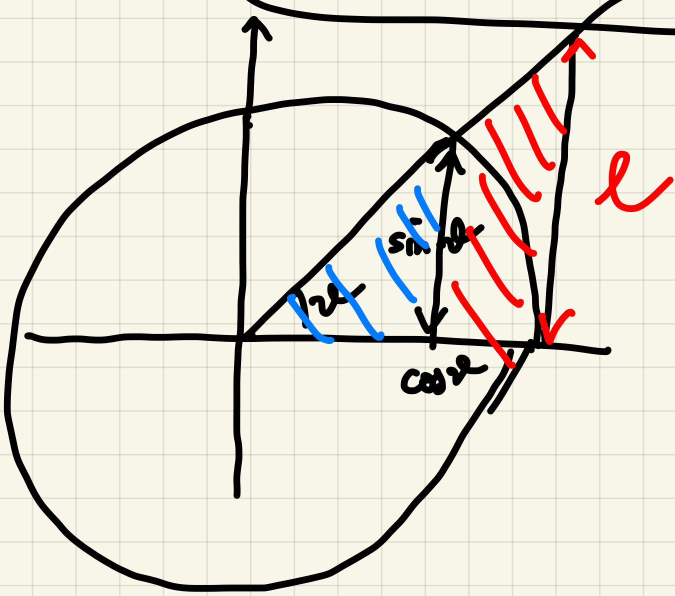
Automaticamente la (1) è vera sia per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ che per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Per i carabinieri $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dimostrazione

$$\boxed{\sin\vartheta \leq \vartheta \leq \tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \quad \forall\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}}$$



$$\frac{l}{\sin\vartheta} = \frac{1}{\cos\vartheta}$$

$$l = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta$$

Area settore circolare $= \frac{\vartheta}{2}$

Area triangolo grande $= \frac{l}{2} = \frac{\tan\vartheta}{2}$

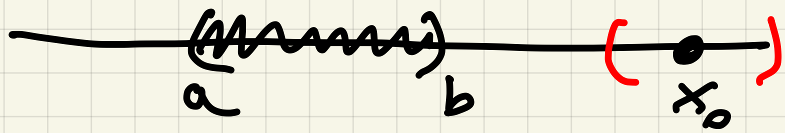
$\Longrightarrow \quad \vartheta < \tan\vartheta$ per $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$

Ricordiamo

$f: X \to \mathbb{R}$ $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$

f è continua in x_0 se

$$* \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{t.c.} \quad \overset{x \in X}{|x - x_0| < \delta_\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$



x_0 isolato $\iff x_0 \notin X'$

$\exists \delta_0 > 0$ t.c. $\quad x \in X$ e $|x - x_0| < \delta_0$

$\Rightarrow \quad x = x_0$

$*$ è vera $\forall \ f: X \to \mathbb{R}$ se scelgo

$\delta_\varepsilon = \delta_0$ perché

$\forall \varepsilon > 0$ se considero questo δ_0 allora

$$|x - x_0| < \delta_0 \ \text{ e } \ x \in X \Rightarrow x = x_0$$

$$\Rightarrow 0 = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$