Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e T–periodica e localmente integrabile, provare che

- Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ vale
$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\alpha-T/2}^{\alpha+T/2} f(x)\, \mathrm{d}x$$
- Se f è dispari allora
$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$
- Se f è pari allora
$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{T/2} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dedurre che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e T–periodica e localmente integrabile

- se f è dispari allora $a_n(f) \equiv 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- se f è pari allora $b_n(f) \equiv 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^\star$.

Esercizio 2. Determinare la serie di Fourier di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, definita da:

1. $f(x) = \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ in $-\pi < x \le \pi$ dove
$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A, \end{cases}$$
2. $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$
3. $f(x) = x$,
4. $f(x) = 1 - 2x$,
5. $$f(x) = \begin{cases} -x(\pi + x) & \text{se} \quad -\pi < x \le 0 \\ x(\pi - x) & \text{se} \quad 0 < x \le \pi\,. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si provi che le seguenti successioni

$$(\cos(n\bullet))_{n\in\mathbb{N}}\,, \qquad\qquad (\sin(n\bullet))_{n\in\mathbb{N}^\star}\,,$$

non convergono nè puntualmente nè uniformemente in $\mathbb{R}$.