Lunedì 5 ottobre, 1 ora. Numeri naturali. Principio di induzione. Teorema sulle dimostrazioni per induzione. Un esempio di dimostrazione per induzione: dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli.

Martedì 6 ottobre, 1 ora, Sommatorie, somma aritmetica.

Giovedì 8 ottobre 2 ore. Dimostrazione per induzione della formula per somme geometriche di ragione r. Fattoriali e coefficienti binomiali. Enunciato (senza dimostrazione) della formula di Newton per i binomi. Triangolo di Tartaglia. Insieme dei numeri complessi C . Somma e prodotto in C. R come sottoinsieme di C , numero i=(0,1) e verifica che i^2=-1.

Venerdì 8 ottobre 2 ore. Complesso coniugato di z. Valore assoluto |z|. Esistenza di 1/z se z≠0 (con dim.). Svolgimento di vari esercizi sui numeri complessi. Formule di De Moivre (solo l'enunciato senza la dimostrazione) .

Lunedì 12 ottobre, 2 ore. Polinomi e loro radici. Teorema fondamentale dell'algebra, versione 1, sull'esistenza di una radice in C per ogni polinomio di grado ≥ 1 . Teorema fondamentale dell'algebra, versione 2, sulla fattorizzazione in polinomi di grado 1. Molteplicità delle radici di un polinomio. ore Polinomi e loro radici. Teorema fondamentale dell'algebra, versione 1, sull'esistenza di una radice in C per ogni polinomio di grado ≥ 1 . Teorema fondamentale dell'algebra, versione 2, sulla fattorizzazione in polinomi di grado 1. Molteplicità delle radici di un polinomio. Teorema sulle radici n esime dell'unità. Esempio z^4 =1. Radici n-esime di un numero complesso qualsiasi: esempio con le radici ottave di 1+i. Un esercizio con risoluzioni di equazioni usando la formula di De Moivre.

Martedì 13 ottobre, 2 ore. Classi separate. Elementi di separazione. Assioma di separazione in R. Retta reale estesa. Definizione di estremo superiore. Teorema sull'esistenza dell'estremo superiore di qualsiasi sottoinsieme di R (senza dim.). supN=infinito (con dim). Definizione di sottoinsieme limitato (superiormente , inferiormente) di R. Una caratterizzazione dell'estremo superiore, quando è finito (con dim.). Minimo e massimo di un insieme. Principio di Archimede (con dim.).

Giovedì 15 ottobre 2 ore. Verifica che ogni sottoinsieme finito (cioè con un numero finito di elementi) di R ha massimo. Densità di Q in R (con dim.). Un esercizio sul principio di induzione.

Venerdì 16 ottobre 2 ore. Definizione di funzione tra due insiemi. Vari esempi di funzione: funzione di Heaviside, funzione segno, funzione di Dirichlet, funzione parte intera. Funzioni crescenti, strettamente crescenti, decrescenti, strettamente decrescenti. Prodotto cartesiano di una coppia ordinata di insiemi. Grafico di una funzione . Immagine di un insieme e contro immagine di un insieme.

Lunedì 19 ottobre, 2 ore. Funzioni pari, dispari . Funzioni iniettive, suriettive e biettive. Funzioni inverse di funzioni biettive. Relazione tra grafico di una funzione biettiva e della sua inversa. Esempi: arcoseno ed arcotangente Definizione della funzione valore assoluto |x| e proprietà. In particolare, dimostrazione della disuguaglianza triangolare.

Martedì 20 ottobre, 2 ore. Distanza tra due punti della retta. Successioni. Definizione di limite di una successione (nel caso di limite finito). Vari esempi. Definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ per L numero reale e per una funzione a valori reali definita su un sottoinsieme X di R con supX=$+\infty$. Verifica che di $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$ e che $\lim_{x\to+\infty} \sin(x)$ non esiste. Teorema dell'unicità del limite (con dim solo nel caso di limiti reali).

Giovedì 22 ottobre 2 ore. Svolgimento in classe dell'esercizio che dice che se |L_1-L_2|<ε per ogni ε>0 allora L_1=L_2 e dell'esercizio che dice che se |L_1-L_2|<2ε per ogni ε>0 allora |L_1-L_2|<ε per ogni ε>0. Definizione di $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$. Per b>1 verifica di $\lim_{n\to+\infty} b$^{n} = $+\infty$. Regole (solo enunciato, senza dimostrazioni) della somma , del prodotto e del quoziente per limiti per $x \to +\infty$. Limite per $x \to +\infty$ di una funzione razionale. Teorema del confronto (solo enunciato). Teorema dei Carabinieri (senza dim.) Dimostrazione che per b>1 il limite di b^{1/n} è 1.

Venerdì 23 ottobre 2 ore. Dimostrazione del teorema dei Carabinieri . Verifica che per b>1 il limite di b^{n}/n è + infinito . Dimostrazione che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = sup f(X)$ per funzione crescenti. Numero di Nepero e dimostrazione che la successione $(1 + 1/n)^n$ è strettamente crescente. Definizione di punto di accumulazione per un sottoinsieme X di R.

Lunedì 26 ottobre, 2 ore. Verifica per b>1 il limite di b^{x} per $x \to +\infty$ è + infinito. Verifica che un insieme finito in R non ha punti di accumulazione in R. Verifica che Z non ha punti di accumulazione in R. Verifica che l'insieme dei punti di accumulazione di Q è tutto R. Definizione di $\lim_{x\to y} f(x) = L$ per L in R per y un punto di accumulazione del dominio di f . Qualche esempio. Definizione di funzione continua.

Martedì 27 ottobre, 2 ore. Dimostrazione dell'equivalenza di varie distinte definizioni di continuità. Teorema sulle regole dei limiti (somma, prodotto, quoziente, tutte senza dim). Teoremi del confronto e dei Carabinieri (solo gli enunciati). Verifica della continuità di sin (x) e di cos (x) in 0 e verifica della continuità di sin (x) in tutto R. Enunciato sulla continuità di cos(x) su tutto R. Verifica parziale di $\lim_{x\to 0} sin(x)/x$=1 a meno di una disuguaglianza che resta da verificare.

Giovedì 28 ottobre 2 ore. Fine della dimostrazione di $\lim_{x\to 0} sin(x)/x$=1 . $\lim_{x\to\infty} (1+ 1/x)^x = e$, senza dim. $\lim_{x\to\infty} (1+ x/n)^n$= e^x, con dim. Tasso di interesse e rivalutazione, annuale, semestrale, continua. Definizione di limite destro e limite sinistro. Caratterizzazione del limite in termini di limiti destro e sinistro (senza dim.). Teorema sui limite destro e sinistro per funzioni monotone (senza dim.).

Venerdì 30 ottobre 2 ore. Dimostrazione della continuità di b^x . Successioni di intervalli dimezzati e lemma su tali successioni (senza dim). Sottosuccessioni di una successione. Chiusura di un sottoinsieme di R, sottoinsiemi chiusi di R. Sottoinsiemi limitati di R. Teorema di Bolzano Weierstrass per successioni in [a,b] (con dimostrazione).

Lunedì 2 novembre, 2 ore. Dimostrazione del teorema di Weierstrass per f:[a,b] →R continue. Vari esempi. In particolare verifica che se f:R →R è continua su R e se $\lim_{x\to\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$ allora f(x) ha punti di minimo. Verifica che se X è un sottoinsieme non vuoto di R allora esiste una successione di elementi di X che ha come limite sup(X).

Giovedì 5 novembre 2 ore. Teorema degli zeri (con dim.). Esempio dell'esistenza di uno zero reale per polinomi a coefficienti reali di grado dispari. Teorema dei valori intermedi (con dim.). Verifica che se n_k è una successione crescente di numeri naturali, allora n_k ≥ k per ogni k. Verifica che se $\lim_{n\to+\infty} x\_n$=L allora $\lim_{k\to+\infty} x\_\{n\_k\}$=L per ogni sottosuccessione.

Venerdì 6 novembre 2 ore. Teorema sul fatto che se f è continua, l'immagine f(I) di un connesso I è un connesso (senza dim.). Teorema sulla continuità delle funzioni inverse di funzioni strettamente monotone definite su intervalli (con dim.). Continuità della composizione di due funzioni continue (con dim.). Esempio: continuità di x^a. $\lim_{y\to 0} \log(1+y)/y = 1 (con\ dim)$, $\lim_{x\to 0}(e^x - 1)/x = 1$ (con dim). Rapporti incrementali e significato geometrico.

Lunedì 9 novembre, 2 ore $\lim_{x\to 0}[(x+1)^a - 1]/x = a$ (senza dim.) . . Dim . di (c) '=0, $(x^a)' = a\ \ x^{a-1}$ (regola della potenza). $(e^x)' = e^x$ con dim, (sin x)' = cos x (con dim.) e (cos x)'=-sinx (senza dim)). (log x)'=1/x. Differenziabilità implica continuità (senza dim.) Regole della somma, del prodotto (con dim.) e del quoziente (solo enunciata). Regola della catena (senza dim). Verifica di (1/g)' =-g'/g^2 .

Martedì 10 novembre, 2 ore. Dimostrazione della regola della catena. Regola della catena Teorema della derivata della funzione inversa (con dim.). Esempi: derivata di arcsin(x) e di arctan(x). Derivata destra e derivata sinistra. Derivate di |x| e di [x] .

Giovedì 12 novembre 2 ore. Funzioni iperboliche e loro derivate. Inversa del sinh (x) (con dim.). Definizione di punti di massimo e di minimo relativo. Definizione di punti critici. Dimostrazione del Teorema di Fermat.

Venerdì 13 novembre 2 ore. Una ricerca di massimi e minimi. Come applicazione di Fermat, dimostrazione di 1+x $\le e^x$ su R. Teorema di Rolle (con dim.). Teorema di Lagrange (con dim). Significato geometrico del segno della derivata. Teorema di Cauchy (senza dim). Legge di riflessione in ottica.

Lunedì 16 novembre, 2 ore Prima regola dell'Hopital (con dim.). Seconda regola dell'Hopital (con dim.). Esempi. Terza regola dell'Hopital (senza dim.).

Martedì 17 novembre, 2 ore. Qualche esempio di limite relativo alle regole dell'Hopital. Gerarchie all'infinito. Definizione di derivate di ordine superiore. . Calcolo delle derivate e^x, sin (x) e cos (x) (senza dimostrazione). Definizione di funzione convessa. Caratterizzazione in termini del coefficiente angolare.

Giovedì 19 novembre 2 ore. 3 caratterizzazioni distinte delle funzioni convesse (senza dim. dell'equivalenza). Caratterizzazione delle funzioni convesse in termini della loro derivata prima (con dim.). Corollario di caratterizzazione delle funzioni convesse in termini della loro derivata seconda (con dim.). Funzioni concave. Flessi e condizione necessaria perché un punto dove esiste la derivata seconda sia un flesso (senza dim.).

Venerdì 20 novembre 2 ore. Due esempi di studi di funzione. Asintoti. Calcolo delle derivate x^a (con dim.).

Lunedì 23 novembre, 2 ore Definizione di polinomio di Taylor e di polinomio di McLaurin. Derivazione dei polinomi di McLaurin di e^x, sin(x), cos(x) e (1+x)^a.

Martedì 24 novembre, 2 ore. Lemma sull'unico polinomio di grado minore o uguale ad n le cui derivate in un punto x_0 sono date da n+1 numeri preassegnati (dimostrato nel caso x_0=0). Formula di Lagrange per il resto (con dimostrazione). Applicazione della formula di Lagrange: approssimazione di e con un numero razionale con errore inferiore a 10^{-3}.

Giovedì 26 novembre 2 ore. Definizione di o piccolo, in particolare o(1) ed o(g(x)): vari esempi. Dimostrazione della formula di Peano per il resto . Lemma sul fatto che se p(x) è un polinomio di grado minore o uguale di n con p(x)= o((x-x_0)^n) allora p(x) è il polinomio nullo (con dimostrazione).

Venerdì 27 novembre 2 ore. Dimostrazione che se f(x)=p(x) + o((x-x_0)^n) con p(x) è un polinomio di grado minore o uguale di n, allora p è il polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0. Utilizzo della formula di Peano per il calcolo di vari polinomi di Taylor di x^2 sin (x^3), e^x sin (x), log(cos(x)).

Lunedì 30 novembre, 2 ore ore Polinomi di McLaurin di $(1+x)^{-1}$, $(1-x)^{-1}$di $(1+x^2)^{-1}$. Cenni introduttivi all'integrazione secondo Darboux. Decomposizioni Δ di intervalli e loro calibro | Δ |. Raffinamenti di decomposizioni Somme S(Δ) e s(Δ) associate ad una data funzione f. Calcolo di S(Δ) e s(Δ) per funzioni costanti e per la funzione di Dirichlet. Calcolo di S(Δ) e s(Δ) per funzioni crescenti. Lemma sul fatto che s(Δ) ≤s(Δ') ≤S(Δ') ≤S(Δ) se Δ ' è un raffinamento di Δ (dimostrazione parziale).

Martedì 1 dicembre, 2 ore. Lemma sul fatto che date due decomposizione esiste una decomposizione che è un raffinamento di entrambe (con dim.). s(Δ') ≤S(Δ) per ogni coppia Δ ', Δ (con dim.). Definizione di integrale superiore e di integrale inferiore. Calcolo dell'integrale superiore ed inferiore per funzioni costanti e per la funzione di Dirichlet. Definizione di integrale di Darboux. Teorema con una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia integrabile secondo Darboux (con dim.). Integrabilità per Darboux delle funzioni monotone (con dimostrazione).

Giovedì 3 dicembre 2 ore. Integrabilità per Darboux delle funzioni continue (con dimostrazione dando per scontata la loro uniforme continuità). Integrale di Riemann e sua equivalenza con l'integrale di Darboux (senza dim.). Monotonia dell'integrale (solo enunciata). Media di una funzione. Teorema della media (con dim.).

Venerdì 4 dicembre 2 ore. Teor. sull'integrabilità di |f(x)| se f(x) è integrabile (senza dim.) e disuguaglianza triangolare (con dim.). Funzione integrale. Continuità della funzione integrale (senza dim.). Teorema fondamentale del calcolo (con dim.). Primitive e funzioni primitivabili. Le funzioni continue sono primitivabili.

Giovedì 10 dicembre 2 ore. Formula dell'integrazione per parti (con dim.) con qualche applicazione. Integrale improprio: integrabilità di funzioni x^{-p} in (0,1] e in [1, infinito) ed in (0, 1] : enunciato e dimostrazione . Verifica che se f è integrabile per Darboux in [a,b] allora è integrabile per Darboux in qualsiasi intervallo [c,d] contenuto in [a,b].

Venerdì 11 dicembre 2 ore. Formula del cambio di variabile per integrali indefiniti (con dim.): qualche esempio. Integrabilità di funzioni x^{-p} in in [1, infinito) : enunciato e dimostrazione . Qualche altro esempio. Teorema su monotonia ed linearità dell'integrale improprio.

Lunedì 14 dicembre 2 ore. Formula del cambio di variabile per integrali definiti (con dim.). Esempio: calcolo della lunghezza di una arco di parabola. Un esempio di decomposizione di Hermite di funzioni razionali. Integrali impropri: Aut-Aut (con dim.); teorema del confronto (con dim.) .

Martedì 15 dicembre, 2 ore. Teorema sulla espansione di Hermite per funzioni razionali : enunciato (senza dim.) nel caso R(x)= $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado P< grado Q . Scomposizione di Hermite di $\frac{1}{(1+x^2)^2}$. Un altro esempio elementare.

Giovedì 17 dicembre 2 ore. Espansione di Hermite per funzioni razionali nel caso R(x)= $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con grado P maggiore o uguale al grado Q. Vari esempi di espansioni di Hermite. Teorema del confronto asintotico (senza dim.) e qualche esempio di applicazione.

Venerdì 18 dicembre 2 ore. Definizione di funzione assolutamente integrabile. Esempi. Teorema che assoluta integrabilità implica integrabilità (solo enunciato) . Verifica che sin(x)/x è integrabile in [1, +∞).

Lunedì 21 dicembre 2 ore. Verifica che sin(x)/x non è assolutamente integrabile in [1, +∞). Esempio: integrabilità di $\log(1+\frac{1}{x})$ tanh(x) sin (x) in [1,+∞). Studio della funzione f(x)= $\int_0^x e^{-1/t} \quad (1+t)dt$

Martedì 22 dicembre, 2 ore. Calcolo dei polinomi di McLaurin di arctan(x) e di log(1+x). Continuità della funzione integrale (con dim.). Verifica che sign (x) non è primitivabile in x. Verifica che la funzione f(x)=sin (x) per x≠ 0 ed f(0)=0 è primitivabile in R (nonostante la discontinuità in 0).

Giovedì 7 gennaio 2 ore. Svolgimento di un limite dall'esame del 9 luglio 2018. Svolgimento di un esercizio sull'integrabilità in [0,∞) di sin(x^p) per p>0.

Venerdì 8 gennaio 2 ore. Soluzione di vari esercizi proposti dagli studenti.

Si ricorda che la lezione di Lunedì 11 è cancellata mentre l'ultima lezione, martedì 12, sarà solo in remoto. Infine, giovedì 14 e venerdì 15, durante l'orario di lezione, si svolgeranno dei ricevimenti. I ricevimenti il pomeriggio sono sospesi.