15 ottobre

Ieri $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Lemma $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Osservazione Questo generalizza
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Lemma $$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Qui osservare che $\qquad a^b \qquad a \geq 0, \; b \notin \mathbb{Q}$

Dominio di $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ contiene la semiretta $(-\infty, -1)$, perchè allora $1 + \frac{1}{x} > 0$

Lemma $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vogliamo dimostrare $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n = e^{x_0}$

Sia $x_0>0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}x_0} = \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}}_{e}\right)^{x_0} =$$

$a^{bc}=(a^b)^c$ $\qquad y=\frac{n}{x_0}$ $\qquad z=\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}}$

Notiamo che $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{\frac{n}{x_0}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$

$$= \lim_{z\to e} z^{x_0} = e^{x_0}$$

Vedremo che $z\to z^{x_0}$ $\quad x_0>0$ è continua in $[0,+\infty)$

Abbiamo visto che $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

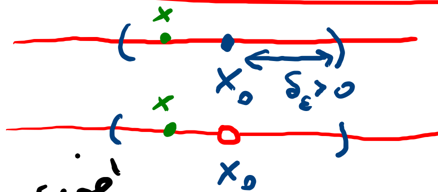
$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

<u>Notazione</u> Se $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$, $\inf X = -\infty$ e se $f: X \to \mathbb{R}$ è t.c. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, allora si scrive $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X$. f è continua in x_0 se

D1 $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



D2 $\quad$ • se x_0 è isolato in X, sempre

• se $x_0 \in X'$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ieri dimostrato che D1 $\Longleftrightarrow$ D2 se x_0 è isolato

Oggi dimostriamo che D1 $\Longleftrightarrow$ D2 anche quando $x_0 \in X'$

Partendo da

D1 $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0$ t.c. $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ e $x\in X \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

uguali δ_ε

segue che se $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ e $x\in X$ allora se vale la D1 vale anche si ottiene $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Cioè $D_1 \Rightarrow D_2$

D2 $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0$ t.c. $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ e $x\in X \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$$0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon \text{ e } x\in X \Longrightarrow |x-x_0|<\delta_\varepsilon \text{ e } x\in X$$

$$\overset{D1}{\Longrightarrow} |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Viceversa se in $x_0 \in X' \cap X$ è vera D2, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

allora se $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Longleftrightarrow (0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X)$

e quindi per questi punti dalla D2 ho $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Nel punto $x = x_0$ è ovvio che $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$. D2 implica D1

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti

1) $x_0 \in X'$

2) $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))' \cup (X \cap (x_0, +\infty))'$

2) $\Rightarrow$ 1) Se 2) è vera allora per fissare le idee possiamo supporre $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$. Ma $X \cap (-\infty, x_0) \subseteq X \Rightarrow$

$$(X \cap (-\infty, x_0))' \subseteq X' \Rightarrow \left(x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))' \Rightarrow x_0 \in X' \right)$$

$1 \Rightarrow 2$ Supponiamo sia falsa, Allora esiste un caso in cui $x_0 \in X'$ ma $x_0 \notin (X \cap (-\infty, x_0))' \cup (X \cap (x_0, +\infty))'$

(1) $x_0 \notin (X \cap (-\infty, x_0))' \Longleftrightarrow \exists\ \varepsilon_1 > 0$ t.c. $\forall x \in X \cap (-\infty, x_0)$ cioè $\forall$ $x \in X$ con $x < x_0$, ho $|x - x_0| \geq \varepsilon_1 > 0$

(2) $x_0 \notin (X \cap (x_0, +\infty))' \Longleftrightarrow \exists\ \varepsilon_2$ t.c. $x \in X$ e $x > x_0 \Rightarrow |x - x_0| \geq \varepsilon_2 > 0$

$\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ osservo che se $x \in X$ e se $x \neq x_0$ allora $|x - x_0| \geq \varepsilon_3 > 0$. Infatti, se $x \in X$ e $x > x_0$ allora ho $|x - x_0| \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, se invece $x \in X$ e $x < x_0$ allora ho $|x - x_0| \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_3$. Abbiamo dimostrato che $\exists\, \varepsilon_3 > 0$ t.c. $x \in X$ e $x \neq x_0 \Rightarrow |x - x_0| \geq \varepsilon_3$

Quindi $x_0 \notin X'$

Esercizio $X \subseteq \mathbb{R}$

$$x_0 \in X' \iff \exists \{x_n\} \text{ strett monotona in } X \text{ con } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$$

Dimostriamo $\Rightarrow$

$x_0 \in X' \Rightarrow x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))' \cup (X \cap (x_0, +\infty))'$. Qui supponiamo che $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$. Osserviamo che $x_0 = \sup(X \cap (-\infty, x_0))$

Infatti $x \in X \cap (-\infty, x_0) \Rightarrow x \in (-\infty, x_0) \Rightarrow x < x_0$

Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists\, x \in \boxed{X \cap (-\infty, x_0)}$ t.c. $0 < |x - x_0| < \varepsilon$

$\Rightarrow x_0 - \varepsilon < x$. Cioè $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X \cap (-\infty, x_0)$ t.c. $x_0 - \varepsilon < x$

$x_0 = \sup(X \cap (-\infty, x_0))$. Dimostreremo che $\exists \{x_n\}$ in $X \cap (-\infty, x_0)$ strettamente crescente t.c. $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

Consideriamo la successione $\{\frac{1}{n}\}$. Ora definirò per induzione $\{x_n\}$

1) sia $x_1 \in X \cap (-\infty, x_0)$ t.c. $x_0 - 1 < x_1 < x_0$

2) Per induzione supponiamo di avere definito $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ in $X \cap (-\infty, x_0)$ tutti che soddisfino

$x_0 - 1 < x_1 < x_0$, $x_0 - \frac{1}{2} < x_2 < x_0$, ..., $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0$. Ora spiegherò come definire x_{n+1} in modo che $x_n < x_{n+1} < x_0$ e $x_0 - \frac{1}{n+1} < x_{n+1} < x_0$

$x_1 < x_2 < \dots < x_n$ in $X \cap (-\infty, x_0)$

$x_0 - \frac{1}{j} < x_j < x_0 \quad j = 1, \dots, n$. Voglio $x_{n+1} \in X \cap (-\infty, x_0)$ t.c.

$$x_n < x_{n+1} < x_0 \quad \text{e} \quad x_0 - \frac{1}{n+1} < x_{n+1} < x_0$$

considero $\max\left\{x_n, x_0 - \frac{1}{n+1}\right\} < x_0 \Rightarrow \exists\, x \in X \cap (-\infty, x_0)$

t.c. $\max\left\{x_n, x_0 - \frac{1}{n+1}\right\} < x < x_0$. Chiamo allora $x_{n+1} = x$.

Resta definito $\{x_n\}$ successione strett crescente in $X \cap (-\infty, x_0)$

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 \overset{\text{Confr}}{\Longrightarrow} \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0.$$