Teorema di caratterizzazione degli insiemi compatti di $\mathbb{R}$

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$, K è chiuso e limitato se e solo se

(*) $\forall$ successione $(x_n)_n$ $x_n \in K$ $\forall n$, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge ad un punto $\alpha \in K$.

Dim Supponiamo K chiuso e limitato $\Rightarrow$ voglio (*)

Sia $(x_n)_n$ una successione in K; K è limitato, per B.W. esiste una sottosuccessione convergente $(x_{n_k})_k$ con $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\boxed{\alpha \in K}$ ho finito. Se $\alpha \notin K$ allora α è un punto di accumulazione, ma allora, perché K è chiuso, deve appartenere a K assurdo.

—o—

Sia vero (*), dimostriamo che K è chiuso e limitato.

Sia α punto di accumulazione per K. Allora esiste $(x_n)_n$ $x_n \in K$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$

$\left[x_n \in \left] \alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n} \right[\cap K \right]$. Quindi K è chiuso.

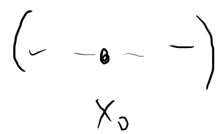
Se K non fosse limitato superiormente, potrei definire una successione in K che diverge a $+\infty$

$(\forall n \ \exists \ x_n \in K \quad x_n > n \ldots)$. Ma allora $(x_n)_n$ è una successione in K che non ha sottosuccessioni convergenti.

$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ se e solo se x_0 è l'unico punto di accumulazione di $\{x_n : n\in \mathbb{N}\}$

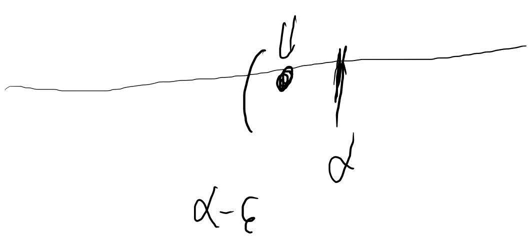
Se x_n è costante $x_n = x_0$ x_0 non è punto di accumulazione

$F \subset E$ x_0 punto di accumulazione per F $\Rightarrow$ x_0 è di accum. per E



$\alpha = \max E$ $\Rightarrow$ α è un punto di accumulazione NO

se $\alpha = \sup E$ e $\alpha \notin E$ allora α è punto di accumulazione



Sia K compatto in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\min K$ e $\max K$.

Limite di una funzione $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

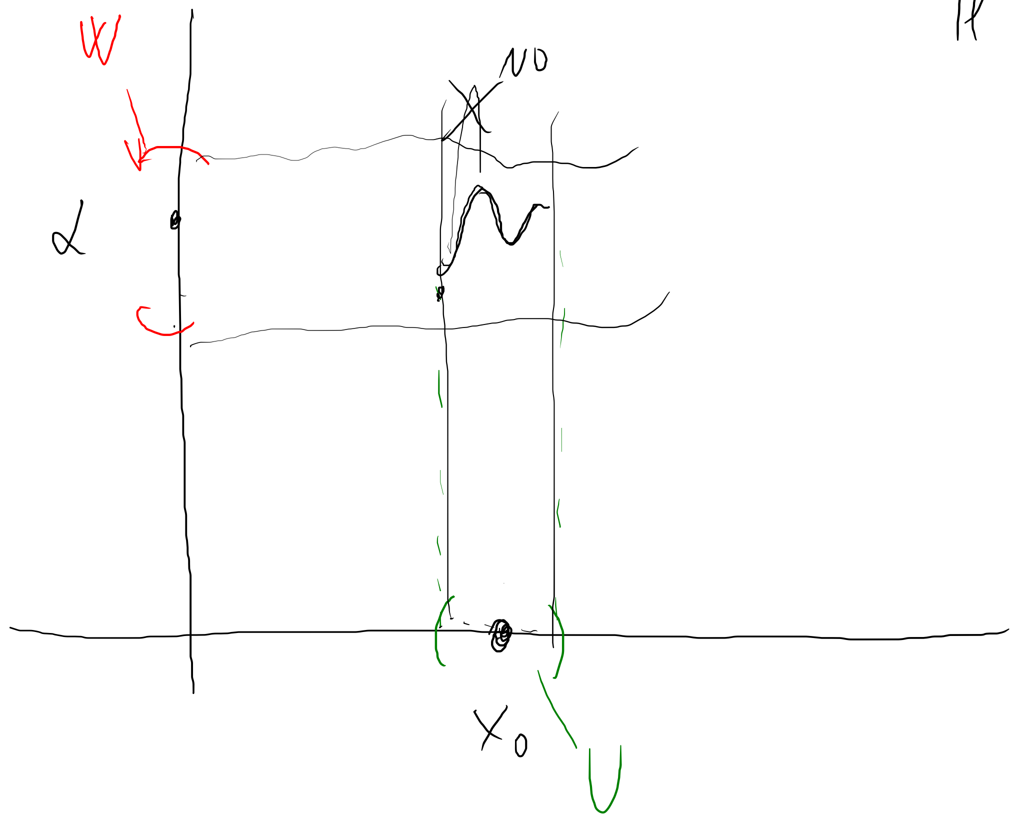
Sia x_0 punto di accumulazione per E oppure $x_0 = -\infty$ se E è inferiormente illimitato

oppure $x_0 = +\infty$ " superiormente

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

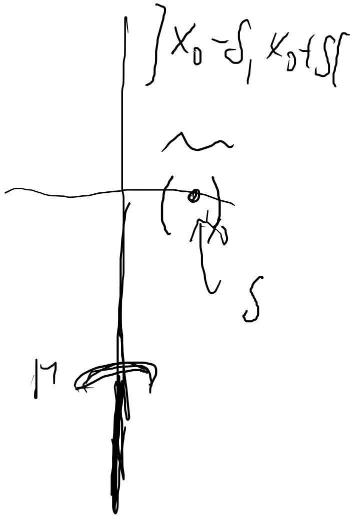
Diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ se

Per ogni intorno W di α esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap E$ $x \neq x_0$ si ha $f(x) \in W$.



Il valore $f(x_0)$ NON interessa!

$$x_0 \begin{cases} \mathbb{R} \\ -\infty \\ +\infty \end{cases} \qquad \alpha \begin{cases} \mathbb{R} \\ -\infty \\ +\infty \end{cases}$$



Scrivere esplicitamente le 9 definizioni di limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$x_0 \in \mathbb{R}$

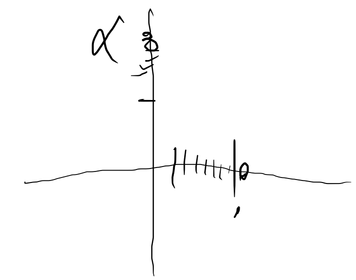
Per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in E$ $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) < M$.

Alcuni teoremi sui limiti di funzioni

Teorema di caratterizzazione del limite di una funzione mediante le successioni

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ x_0 punto di accum. per E oppure $x_0 = -\infty$, $x_0 = +\infty$ (se E è inf/sup. illimitato)

$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$



Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ se e solo se

Per ogni successione $(x_n)_{n \geq 1}$ con $x_n \in E$ $x_n \neq x_0$ $\forall n$, $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

allora $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$

Dim. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$. (*)

Sia $(x_n)_n$ $x_n \in E \setminus \{x_0\}$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$; proviamo che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$

$\Updownarrow$

$\forall W$ intorno di α $\exists\, n_W \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_W$ $f(x_n) \in W$

Fissato W intorno di α, esiste un intorno $\boxed{U}$ di x_0 tale che $\forall x \in U \cap E$ $x \neq x_0$ si ha $f(x) \in W$. (*)

Poiché $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall n \geq n_U$ si ha $x_n \in U$, $x_n \in E \cap U$ $x_n \neq x_0$

quindi $f(x_n) \in W$.

Viceversa sia vero che $\forall\ (x_n)_n$ $x_n \in E$ $x_n \neq x_0$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ si ha

$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$.

Proviamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, cioè $\forall$ W intorno di α $\exists$ U intorno di x_0 tale

che $\forall\ x \in U \cap E$ $x \neq x_0$ $f(x) \in W$.

$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$

Per assurdo sia falso, quindi

esiste un intorno W di α tale che per ogni intorno U_n di x_0 $\Big[$ se $x_0 \in \mathbb{R}$ $U_n =]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[$

se $x_0 = +\infty$ $U_n =]n, +\infty[$, se $x_0 = -\infty$ $U_n =]-\infty, -n[\ \Big]$, esiste $x_n \in U_n \cap E$ $x_n \neq x_0$

$f(x_n) \notin W$. Osserviamo che $(x_n)_n$ è una successione in E con $x_n \neq x_0$ e

$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, per ipotesi deve essere $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$, assurdo perché $f(x_n) \notin W\ \forall n$.

Applicazioni: $\lim_{x \to x_0} (a f(x) + b g(x)) = a \lim_{x \to x_0} f(x) + b \lim_{x \to x_0} g(x)$

[supposto esistenti $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$]

$f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dim Il risultato vale per le successioni!

Sia x_n $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ $x_n \neq x_0 \ \forall n$ $x_n \in E$; $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$

$\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \beta$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (a f(x_n) + b g(x_n)) = a\alpha + b\beta$.

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (a f(x) + b g(x)) = a\alpha + b\beta$.

Teorema di unicità del limite $[f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ......$]$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \beta$

Dim $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \rightsquigarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$ e $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \beta \implies \alpha = \beta$.

Teorema sul limite della restrizione

(oppure $x_0 = \pm\infty$ ....)

$f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F \subset E \qquad x_0$ punto di accumulazione per F (quindi x_0 è punto di accumulazione per E)

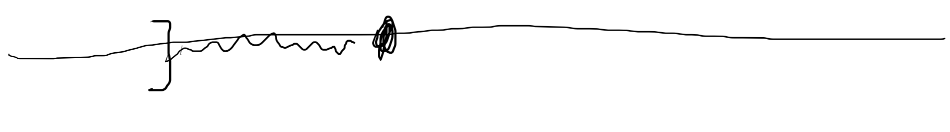
se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ allora $\lim_{x \to x_0} f\big|_F (x) = \alpha$.

Dim Sia $(x_n)_n \quad x_n \in F \setminus \{x_0\} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ quindi $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \alpha$ //

Applicazione: se esistono $F_1, F_2 \subset E$ x_0 è punto di accum. per entrambi,

$\lim_{x\to x_0} f|_{F_1}(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to x_0} f|_{F_2}(x) = \beta$ $\alpha \neq \beta$ $\Rightarrow$ non esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$

Esempio importante $F_1 = E \cap]-\infty, x_0[$ $F_2 = E \cap]x_0, +\infty[$

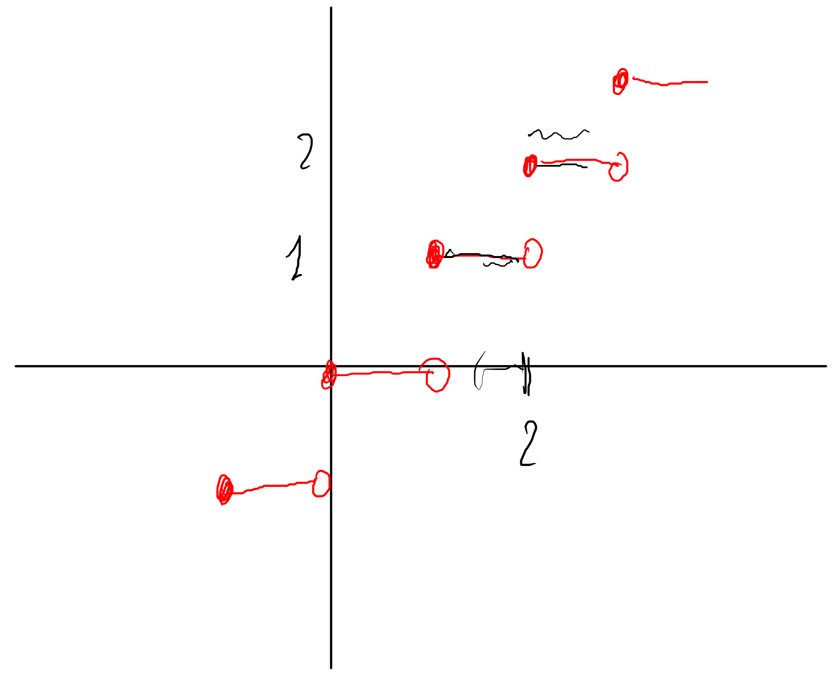


Diremo limite destro / sinistro di f per x che tende a x_0 (o limite di f per x che tende a x_0 da destra / sinistra) il limite

$$\lim_{x \to x_0^{+ / -}} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{E\cap]-\infty, x_0[\;/\; E \cap]x_0, +\infty[}(x)$$

↑ da sinistra

Es: $f(x) = [x]$ parte intera



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = ?$$ NON ESISTE

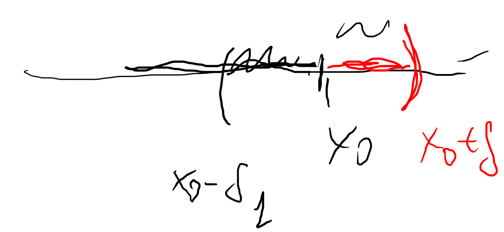
Teorema $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 di accumulazione per $E \cap]-\infty, x_0[$ e per $E \cap]x_0, +\infty[$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ se e solo se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha$.

Dim $\Rightarrow$ già fatto

$\Leftarrow$ Sia W intorno di α, poiché $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$\forall x \in E$ $\quad x_0 - \delta_1 < x < x_0$ si ha $f(x) \in W$



Poiché $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \alpha$ esiste $\delta_2 > 0$ tale che

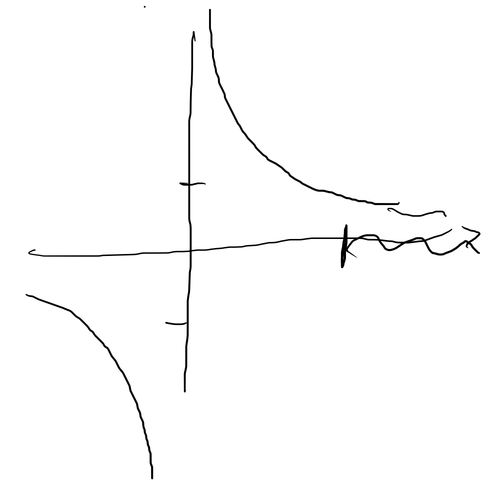
$x_0-\delta_1 \le x_0-\delta < x < x_0+\delta \le x_0+\delta_2$

$\forall x \in E$ $\quad x_0 < x < x_0 + \delta_2$ si ha $f(x) \in W$.

Quindi, prendendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha che $\forall x \in E$ $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) \in W$

Comportamento "locale" di una funzione

Teorema della limitatezza locale $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$



Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ $[x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}]$

Allora esiste un intorno U di x_0 dove f è limitata [quindi esiste $M \in \mathbb{R}$

tale che $\forall x \in U \cap E \quad |f(x)| \leq M$]

Dim prendiamo $\varepsilon = 1$ nella definizione di limite [$\forall \varepsilon > 0 \ \exists U$ intorno di x_0 tale che

$\forall x \in E \cap U \ x \neq x_0 \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$]

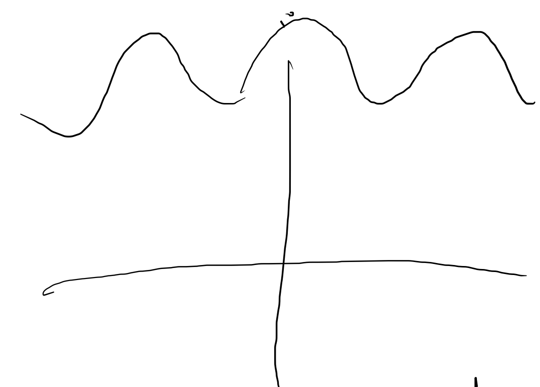
$|f(x) - \alpha| < 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < 1 + |\alpha| \quad \forall x \in U \cap E \ \ x \neq x_0$

Prendiamo $M = \max\{1 + |\alpha|, \ |f(x_0)|\}$

<u>Def.</u> funzione discosta da zero

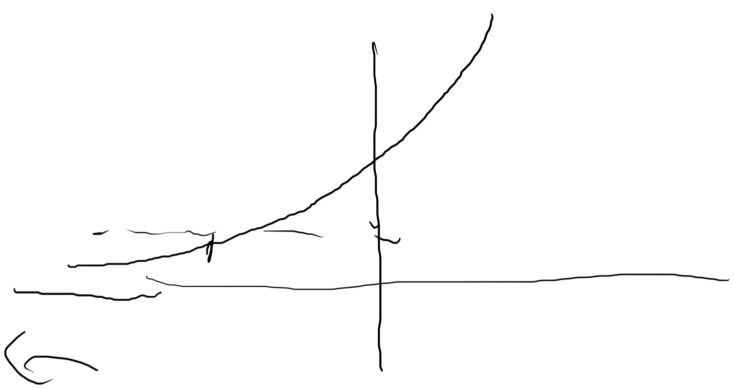
$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice discosta da zero se esiste $K \in \mathbb{R}$ $K > 0$

tale che $|f(x)| \geq K$ $\forall x \in E$



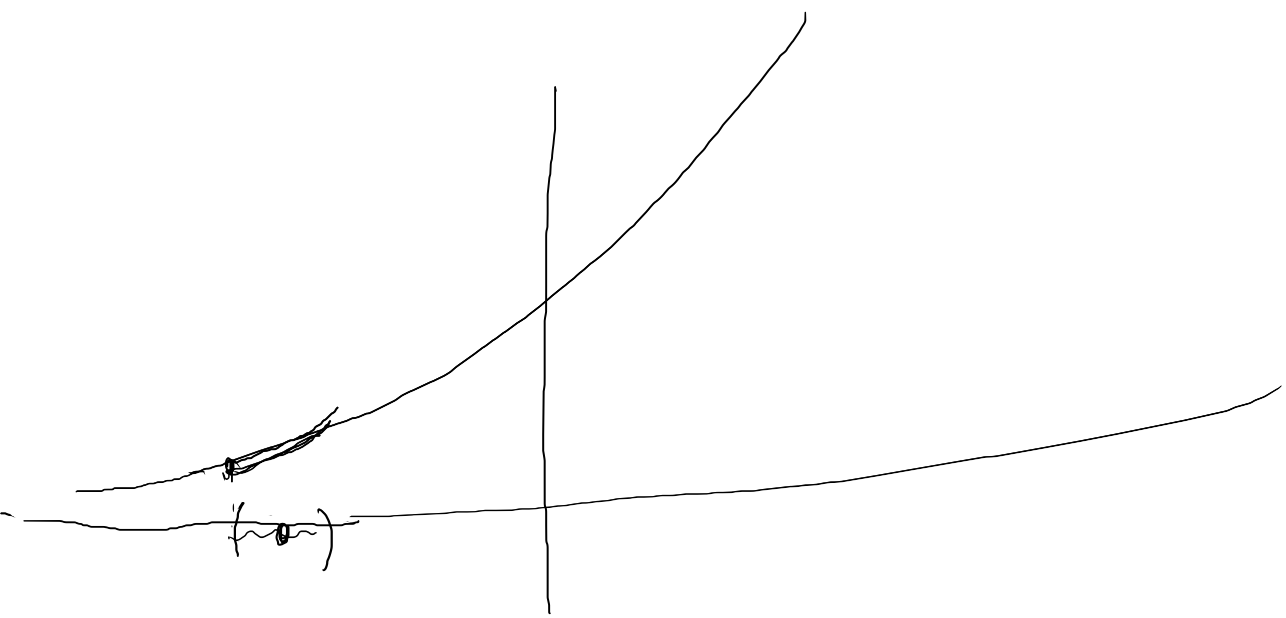
es: $f(x) = \sin x + 2$ $|f(x)| \geq 1$ $\forall x$

es: $f(x) = e^x$ $f(x) > 0$ $\forall x$ però NON è discosta da zero!



f si dice localmente discosto da zero in x_0 se esiste un intorno U di x_0 e $f|_{E \cap U}$ è discosto da zero.

OSS $f(x) = e^x$ è localmente discosto da zero in ogni punto di $\mathbb{R}$



Teorema della permanenza del segno

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \notin E$ $\quad x_0$ punto di accumulazione per E (oppure $\pm\infty$)

Sia $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ $\quad \alpha \neq 0$.

Allora f è localmente discosta da zero in x_0; inoltre

se $\alpha > 0$ $\quad f$ è localmente positiva in x_0

se $\alpha < 0$ $\quad$ " $\quad$ negativa in x_0

[Cioè esiste un intorno U di x_0 e $K \in \mathbb{R}$ $K > 0$ tale che

se $\alpha > 0$ $\quad f(x) \geq K > 0 \quad \forall x \in U \cap E$; se $\alpha < 0$ $\quad f(x) \leq -K < 0 \quad \forall x \in U \cap E$]

Dim Sia $\underline{\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha > 0}$; considero $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ nella definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$

allora esiste U intorno di x_0 tale che $\forall x \in E \cap U$ ($x \neq x_0$) $|f(x) - \alpha| < \frac{\alpha}{2}$

non serve

$x_0 \notin E$

cioè $\alpha - \frac{\alpha}{2} < f(x) < \alpha + \frac{\alpha}{2}$ e quindi $f(x) > \frac{\alpha}{2}$ $\forall x \in U \cap E$ //

se $\alpha = +\infty$ fissiamo $M = 1$ e si ha che esiste U intorno di x_0 tale che

$\forall x \in U \cap E$ ($x \neq x_0$) $f(x) > 1$

— o —

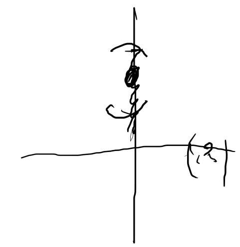
se $\alpha < 0$ considero $\varepsilon = -\frac{\alpha}{2}$ ... $\rightsquigarrow$ $\alpha + \frac{\alpha}{2} < f(x) < \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} < 0$ $\quad f(x) < \frac{\alpha}{2} < 0$

$\alpha \in \mathbb{R}$

Limite della funzione reciproca

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \qquad \alpha \neq 0$

$x_0 \notin E$ $\qquad$ allora f è localmente diversa da zero in x_0, quindi esiste un intorno U_{π} di x_0 e $\frac{1}{f}$ è definita in $E \cap U$.



Si ha allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } \alpha \in \{\mp\infty\} \end{cases}$$

Dim Esiste U_0 dove f è localmente discosta da 0. Cioè esiste $K > 0$ tale che $|f(x)| \geq K > 0$ $\forall x \in U_0 \cap E$. Allora caso $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\alpha} \right| = |f(x) - \alpha| \cdot \frac{1}{|f(x)| \cdot |\alpha|} \leq |f(x) - \alpha| \cdot \frac{1}{K|\alpha|} < \varepsilon$$

se $|f(x) - \alpha| < \varepsilon \cdot K|\alpha|$

Limite del prodotto

$f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p. di acc. per E (oppure $x_0 = \pm\infty$)

1) sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \alpha \cdot \beta$.

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\underbrace{g(x) \text{ è localmente discosta da zero}}$ e positiva $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = +\infty$

" e negativa $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $g(x)$ è loc. disc. da zero e positiva $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = -\infty$

" negativa $\Rightarrow$ $+\infty$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $g(x)$ localmente limitata $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} = 0$

Dim 1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \alpha \cdot \beta$

Si vuole dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno U di x_0 tale che $\forall x \in E \cap U$ $x \neq x_0$ $|f(x) \cdot g(x) - \alpha \cdot \beta| < \varepsilon$.

$$|f(x) \cdot g(x) - \alpha \beta| = |(f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \beta) + (f(x) \cdot \beta - \alpha \beta)| \leq$$

$$= |f(x) \cdot (g(x) - \beta)| + |\beta (f(x) - \alpha)| = |f(x)| \, |g(x) - \beta| + |\beta| \, |f(x) - \alpha| \leq (*)$$

per il Teorema della limitatezza locale essendo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ esistono U_0 intorno di x_0 e $M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in U \cap E$ $|f(x)| \leq M$.

~~$|g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|f(x)|}$~~

Quindi $\qquad M > 0$

$$|f(x)\cdot g(x) - \alpha\cdot\beta| \leq M \cdot \underbrace{|g(x)-\beta|} + |\beta|\,\underbrace{|f(x)-\alpha|} < (*)$$

per ogni $x \in U_0 \cap E$

poiché $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ esiste U_1 intorno di x_0 tale che

$\forall x \in U_1 \cap E \quad x \neq x_0 \quad |g(x)-\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

poiché $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ esiste U_2 intorno di x_0 tale che

$\forall x \in U_2 \cap E \quad x \neq x_0 \quad |f(x)-\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$

$$(*) < \varepsilon \text{ se } x \in \underbrace{(U_0 \cap U_1 \cap U_2)}_{\text{è un intorno di } x_0} \cap E \quad x \neq x_0.$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \beta \neq 0$

$$f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \qquad \beta \neq 0$