Lezione 14 ottobre 2021

giovedì 14 ottobre 2021 10:43

Abbiamo visto la def. di base di V
$\{v_1, \dots, v_n\}$ vettori di V t.c.

① sono GENERATORI

② sono LIN. INDIP.

Esempi: visto 4 basi in $\mathbb{R}^2$,
in particolare base canonica $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

Esempio: in $\mathbb{R}^n$ per n generale, posso cons.

$$e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n := \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Affermo che $\mathcal{E}$ è una base di $\mathbb{R}^n$,
base CANONICA.

Infatti: ① generatori:

Sia $v \in \mathbb{R}^n$, v generico

$v = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$; devo dimostrare che ∃ siano coefficienti $c_1, \dots, c_n$ t.c.

$v = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + \dots + c_n e_n$; riscrivo in componenti

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + c_n \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\c_2\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2 = c_2 \\ \vdots \\ a_n = c_n \end{cases}$$

② sono LIN. INDIP.:

uso la Def. 2:

supp. $b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n = 0$ vettore nullo

devo dim. che $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

Infatti:

$$b_1 \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

$b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $\dots$, $b_n = 0$

OSS. La base canonica si può definire analogamente in ogni spazio vettoriale del tipo $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K}$ è un campo qualunque

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} : k_i \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} \overset{\text{neutro per il } \cdot \text{ di } \mathbb{K}}{1} \\ 0 \\ \vdots \\ \underset{\text{neutro per la } + \text{ di } \mathbb{K}}{0} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esempio: SPAZIO DELLE MATRICI:

$M_{m,n}(\mathbb{K})$ = matrici di tipo $m \times n$

$A+B$, $c \cdot A$ è sp. vett. su $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{mn} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$n=2: \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In generale: poniamo $E_{(i,j)}$ la matrice che ha 1 nella posizione ij e 0 altrove

$\Rightarrow$ si ha ogni matrice è combinaz. lineare di $E_{(i,j)}$:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{(i,j)}$$

quindi $\{E_{(1,1)}, E_{(1,2)}, E_{(1,3)}, \dots, E_{(2,1)}, \dots, E_{(m,n)}\}$

è un insieme di generatori per $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Affermo: $\{E_{(i,j)}\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ sono anche LIN. INDIP.

Infatti: supp. $b_{11} E_{(1,1)} + b_{12} E_{(1,2)} + \cdots + b_{mn} E_{(m,n)} = \underset{\Downarrow}{0}$

$$b_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + b_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + b_{mn} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad b_{ij} = 0 \quad \forall\, i, j$ ☺

$\Longrightarrow \{E(i,j)\}$ formano una base di $M_{m,n}(\mathbb{K})$

sono $m \cdot n$ vettori

verrà chiamata **BASE CANONICA**

$(\mathbb{R}^n, \text{ o } \mathbb{K}^n$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\overset{\downarrow}{\mathbb{R}} \times \overset{\downarrow}{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overset{\downarrow}{\mathbb{R}}}_{n \text{ volte}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

$\mathbb{Z}_n$ = insieme classi di resto nella divisione per n

$$= \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

∼ · ∼ · ∼ · ∼

Vediamo come il dato di una base ci permette di associare delle COORDINATE ad ogni vettore:

TEOREMA: Un insieme di vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di uno sp. vett. V è una BASE $\Longleftrightarrow$ ogni vettore di V si scrive in MODO UNICO come comb. lineare di $v_1, \ldots, v_n$.

Grazie a questo Teorema possiamo definire:

Def.: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, e sia $v \in V$. I coefficienti $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ dell'unica comb.

$$v = \boxed{c_1} v_1 + \boxed{c_2} v_2 + \dots + \boxed{c_n} v_n$$

si chiamano COORDINATE DI v nella $\mathcal{B}$

Dim. Teorema:

$\Rightarrow$: supp. $\overset{=\mathcal{B}}{\{v_1, \dots, v_n\}}$ base, e sia $v \in V$ qualunque

siccome $\mathcal{B}$ è base, $v_1, \dots, v_n$ sono generatori

quindi: $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$

supp. che v si scriva anche in un altro modo

$$v = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$$

$$\Rightarrow c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$$

$$\underbrace{(c_1 - d_1)}_{\in K} v_1 + (c_2 - d_2) v_2 + \dots + \underbrace{(c_n - d_n)}_{\in K} v_n = 0$$

MA: $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ LIN. INDIP.

$\Rightarrow c_1 - d_1 = 0, \dots, c_n - d_n = 0$

$\Rightarrow c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$

Dimostro $\Leftarrow$: ho $v_1, \dots, v_n$ e so che ogni v si scrive in modo unico come COMB. LIN.

devo dim. che formano base.

① generatori: sì, perché ogni v è comb. lin.

di $v_1, \dots, v_n$ per ipotesi;

② sono LIN. INDIP.:

supp. $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$

MA: si ha anche

$$0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

per ipotesi c'è unicità di rapp. ∀ vettore, quindi anche per il vettore nullo ⇒ $a_1 = 0,\ a_2 = 0, \dots, a_n = 0$

ESEMPIO: in $\mathbb{R}^2$ cons. 2 basi

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{esercizio: è base di } \mathbb{R}^{?}}$$

cons. $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e voglio determ. le sue coord.

$$v = c_1 e_1 + c_2 e_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \textcircled{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \textcircled{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ⇒ le coordinate sono $(2, 4)$

⚠ le coordinate nella base $\textcircled{\mathcal{E}}$ coincidono con le componenti di un vettore

Componenti

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \textcircled{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \textcircled{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

coordinate

INVECE: nella $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 4 \end{cases}$$

⇒ nella $\mathcal{B}$, le coordinate di $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono $(-2, 4)$

LE COORDINATE DI $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ NON COINCIDONO CON LE SUE COMPONENTI