Lezione 12 ottobre 2021

martedì 12 ottobre 2021 11:06

Richiamo: V sp. vett. su $\mathbb{K}$ (vuol dire che sono + e $\cdot$ che verificano v1, ..., v8)

cons. $W \subseteq V$ sotto ins. è SSV se valgono SSV1 e SSV2 (chiuso risp. a + e risp. a $\cdot$)

Abbiamo visto DIP. & INDIP. LINEARE

Def. 1: $v_1, \dots, v_k \in V$ sono LIN. DIP. se uno di loro è comb. lineare degli altri.

Def. 2: $v_1, \dots, v_k \in V$ sono LIN. DIP. se $\exists$ una loro comb. lineare con coeff. non tutti nulli, che dia il vettore nullo:

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$ vettore nullo,

e $\exists\, i : c_i \neq 0$.

DEF. 1 $\Rightarrow$ DEF. 2 :

Def. 1. : $\exists\ v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_{i-1} v_{i-1} + c_{i+1} v_{i+1} + \dots + c_k v_k$

$$\boxed{c_1} v_1 + \boxed{c_2} v_2 + \dots + \boxed{c_{i-1}} v_{i-1} \underset{\neq 0}{\boxed{-1}} \cdot v_i + \boxed{c_{i+1}} v_{i+1} + \dots + \boxed{c_k} v_k = 0$$

$\Rightarrow$ Def. 2.

DEF. 2 $\Rightarrow$ DEF. 1 :

$\exists$ una $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$ dove non tutti i c_i sono nulli; cioè $\exists\ \boxed{c_j \neq 0.}$

$$c_j v_j = -c_1 v_1 - c_2 v_2 \dots - c_{j-1} v_{j-1} - c_{j+1} v_{j+1} - \dots - c_k v_k$$

$$v_j = -\frac{c_1}{c_j} v_1 - \frac{c_2}{c_j} v_2 \dots - \frac{c_k}{c_j} v_k \Rightarrow \text{DEF. 1}$$

OSS.: ① Cons. 1 vettore v_1; è LIN. DIP. se

$\exists$ una comb. linear. $c_1 v_1 = 0$ con coeff. non tutti nulli, cioè con $c_1 \neq 0$

$\Rightarrow v_1 = 0$ il VETTORE NULLO

② Cons. 2 vettori : v_1 e v_2 ; sono LIN. DIP.

scelgo Def. 1 : v_1 è combi. lin. di v_2

oppure v_2 è comb. lin. di v_1

cioè: $\exists\, c \in K$: $v_1 = c \cdot v_2$ oppure

$v_2 = c \cdot v_1$

$\Rightarrow$ i 2 sono proporzionali

③ 3 vettori v_1, v_2, v_3 : vedremo prossimamente

sono LIN. DIP. se $v_1 = c_2 v_2 + c_3 v_3$

(oppure $v_2 = c_1 v_1 + c_3 v_3$, $v_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2$) $\Longleftrightarrow$

v_1, v_2 e v_3 sono COMPLANARI

④ Cons. $v_1, v_2, \dots, v_k$; se uno dei vettori è 0 , allora $v_1, \dots, v_k$ sono DIPENDENTI.

Infatti: Supp. $v_i = 0$, posso cons.

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_{i-1} + \underset{\neq 0}{\textcircled{1}} \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_k = 0$$

$\Rightarrow$ per la Def. 2, sono DIP.

∼ . ∼ . ∼ . ∼

GENERATORI

Def. : Siano $v_1, \dots, v_\ell \in V$; si dicono GENERATORI per V (un sistema di generatori, un insieme di generatori) se

$$V = \text{Span}(v_1, \dots, v_\ell)$$

Def. : Un sottoinsieme $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ si dice **BASE** di V se:

① $v_1, \dots, v_n$ sono GENERATORI per V

② $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. INDIP.

Esempio: in $\mathbb{R}^2$ cons. $\underset{=v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$, $\underset{=v_2}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}$ e $\underset{=v_3}{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$

① sono dei generatori per $\mathbb{R}^2$?

cons. un qualunque $v \in \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

devo dimostrare che è poss. scrivere v come comb. lineare di v_1, v_2, v_3

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}}_{\text{vettore dati}} = \begin{pmatrix}c_1 + c_2 + 3c_3\\ c_1 + 2c_2 + 4c_3\end{pmatrix}$$

c_1, c_2 e c_3 incognite

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = a_2 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a_1 \\ 1 & 2 & 4 & a_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & a_1 \\ 0 & 1 & 1 & a_2 - a_1 \end{array}\right)$$

è compatibile

$\Longrightarrow$ v_1, v_2 e v_3 sono generatori per $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = a_1 & a_1 = 5 \\ c_2 + c_3 = a_2 - a_1 & a_2 = 8 \end{cases}$$

vedo anche che il sistema ha infinite soluzioni, una incognita è libera

$\Longrightarrow$ ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere in INFINITI MODI come comb. lineare di v_1, v_2, v_3

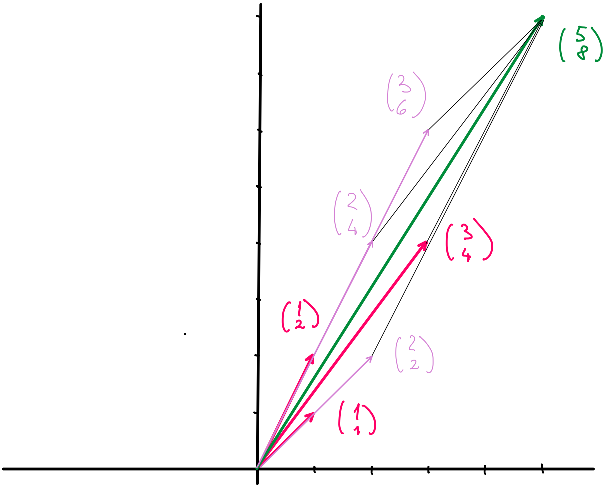
Per esempio: $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Domanda: i 3 vettori sono LIN. INDIP. o DIP.?

$\binom{3}{4} = 2\cdot\binom{1}{1} + 1\cdot\binom{1}{2} \Longrightarrow$ SONO DIP.

$\Longrightarrow$ NON FORMANO UNA BASE

Se invece considero solo v_1 e v_2:

$\binom{1}{1}$ e $\binom{1}{2}$: ① sono generatori :

sia $v = \binom{a_1}{a_2}$ qualunque, $\binom{a_1}{a_2} = c_1\binom{1}{1} + c_2\cdot\binom{1}{2}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 \\ c_1 + 2c_2 = a_2 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 2 & a_2 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 - a_1 \end{array}\right)$$

è compatibile : $\begin{cases} c_1 + c_2 = a_1 \\ c_2 = a_2 - a_1 \end{cases} \Longrightarrow$ c'è 1! soluzione

$$\begin{cases} c_1 = 2a_1 - a_2 \\ c_2 = a_2 - a_1 \end{cases}$$

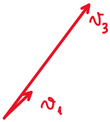
Sono indip.? sì, perché non sono proporzionali

$\Longrightarrow$ $\{v_1, v_2\}$ formano una base.

Esercizio: Cons. $\{v_1, v_3\} = \left\{\binom{1}{1}, \binom{3}{4}\right\}$

verificare che sono generatori per $\mathbb{R}^2$ e sono

LIN. INDIP. $\Longrightarrow$ BASE



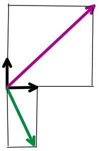
Esercizio: Cons. $\{v_2, v_3\} = \left\{\binom{1}{2}, \binom{3}{4}\right\}$

verificare che sono generatori per $\mathbb{R}^2$ e sono INDIP.

$\Longrightarrow$ BASE

Esempio: in $\mathbb{R}^2$, cons. $v_1 = \binom{1}{0}$ e $v_2 = \binom{0}{1}$

- sono generatori?



Sì, infatti: $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} c_1 = a_1 \\ c_2 = a_2 \end{cases}$ incognite c_1, c_2

dati a_1 e a_2

$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{array}\right)$ è compatibile, ha 1! soluzione

- Sono INDIP.? sì, non sono proporzionali

$\Rightarrow$ sono BASE

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ BASE CANONICA di $\mathbb{R}^2$

i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: e_1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: e_2$

in fisica: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{i}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{j}$

Esempio: in $\mathbb{R}^3$: Cons.

$$\mathcal{E} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:e_3} \right\}$$

in fisica: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

formano una base di $\mathbb{R}^3$:

- generatori: $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} c_1 = a_1 \\ c_2 = a_2 \\ c_3 = a_3 \end{cases}$$

è compatibile, ha 1! soluzioni.

- indip. : supp.

$$b_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + b_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ SONO INDIP.