Rapp. studenti ULISSE VIEZZOLI
tel. 339 830 1652

Problema: come costruire una base di V a partire da un insieme di generatori.

Teorema di estrazione di una base:

Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di generatori per V.

Allora è possibile estrarre una base da $\{v_1, \dots, v_k\}$.

(cioè: $\exists$ un sottoins. di $\{v_1, \dots, v_k\}$ che forma una base di V).

Abbiamo bisogno di 2 lemmi:

LEMMA 1	**LEMMA 2**
Siano $u_1, \dots, u_\ell \in V$, e sia $u \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell)$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell) = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u)$	Siano $u_1, \dots, u_h \in V$ vettori LIN. INDIP., e sia $u \notin \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$ $\Rightarrow$ $u_1, \dots, u_h, u$ sono LIN. INDIP.

Dim. Lemma 1

$u = a_1 u_1 + \dots + a_\ell u_\ell$

$w \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u)$

$w = b_1 u_1 + \dots + b_\ell u_\ell + b u$

$= (b_1 + a_1) u_1 + \dots + (b_\ell + a_\ell) u_\ell$

$\Rightarrow w \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell) \Rightarrow \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u) \subseteq \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell)$

Siccome $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u) \supseteq \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell)$ vale sempre, si ha $=$.

Dim. Lemma 2:

IPOTESI:

(*) $u_1, \dots, u_h$ LIN. INDIP. e

(**) $u \notin \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$

Supp. per assurdo che $u_1, \dots, u_h, u$ siano LIN. DIP. e sia

$$c_1 u_1 + \dots + c_h u_h + \overset{\neq 0}{c}\, u = 0 \text{ vett. nullo}$$

dove non tutti i coefficienti sono nulli.

Osservo che $u_1, \dots, u_h$ LIN. INDIP. $\Rightarrow$ $c \neq 0$

infatti: se fosse $c = 0$, troverei $c_1 u_1 + \dots + c_h u_h = 0$ con c_i non tutti nulli $\Rightarrow u_1, \dots, u_h$ LIN. DIP. contro l'ipotesi (*)

$\Rightarrow u = \frac{1}{c} \cdot (-c_1 u_1 - \dots - c_h u_h)$

$= -\frac{c_1}{c} u_1 - \dots - \frac{c_h}{c} u_h \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$

e questo contraddice l'ipotesi (**).

Dim. del Teo. di estrazione

Chiamo $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ la base da estrarre

Costruisco un ALGORITMO:

- cons v_1:
  - $v_1 = 0$ lo SCARTO
  - $v_1 \neq 0$ lo SCELGO: $v_1 \in \mathcal{B}$
- cons. v_2:
  - $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$ lo SCARTO $\Rightarrow$ L1: $\mathrm{Span}(v_1) = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$
  - $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$ lo SCELGO $v_2 \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow$ L2: v_1, v_2 sono indipendenti
- cons. v_3:
  - $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ lo SCARTO $\Rightarrow$ L1: $\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$
  - $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ lo SCELGO $\Rightarrow$ L2: i vettori finora scelti sono LIN. INDIP.

$\vdots$

- cons. v_i:
  - $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ lo SCARTO
  - $v_i \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ lo SCELGO

In questo modo si arriva al passo k.

Per costruzione, tutti i vettori scelti sono LIN. INDIP. per il Lemma 2, e il loro Span è $= \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$.

Schemino:

$$\mathrm{Span}(v_1) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$$

ogni volta che c'è $\subsetneq$, scelgo il vettore aggiunto.

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$

$\{v_1, \dots, v_4\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$ (esercizio)

Estrarre una base da $\{v_1, \dots, v_4\}$:

- cons. v_1: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ LO SCELGO
- cons. v_2: $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$? sì
  $v_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ LO SCARTO
- cons. $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$: $v_3 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(v_1, v_2) = \mathrm{Span}(v_1)$ NO
  $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1)$ LO SCELGO
- cons. $v_4 = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $v_4 \overset{?}{\in} \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_3)$ SÌ

Vediamo: $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_1 + c_2\end{pmatrix}$, $\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_1 + c_2 = -1 \end{cases}$ è SL compat.

$\Rightarrow v_4 \in \mathrm{Span}(v_1, v_3)$, $k = 4$.
LO SCARTO

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{v_1, v_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

COROLLARIO: $\forall$ Ogni V sp. vett. FINITAMENTE GENERATO (cioè ammette un insieme finito di generatori), $\exists$ UNA BASE di V.

OSS. Non tutti gli spazi vettoriali sono finitamente generati.

es $V = \mathbb{R}[x]$ spazio dei polinomi in x a coeff. in $\mathbb{R}$

$p(x) = x^2 - 2x + 1$, $q(x) = 3x^{17} - 25x^{15} + 8x^{10} - 2$

...

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x$

$\mathrm{Span}(f(x), g(x)) = \{c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \{c_1 \cdot (x^2 - 1) + c_2 \cdot x\}$

$= \{c_1 x^2 + c_2 \cdot x - c_1\} \not\ni x^2 + x$

contiene ∞ polinomi di grado 2, ma NON TUTTI

$c_1 = 1$ e $c_1 = 0$

Invece, se cons. $\mathrm{Span}(x^2, x, 1) = \{c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot 1 : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$

$=$ spazio vett. di tutti i polinomi di grado ≤ 2

Se cons. $\mathbb{R}[x]$, notiamo che NON può esistere un # finito di generatori:

Se, per assurdo, $\exists$ k polinomi

$\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$ che generano $\mathbb{R}[x]$

possiamo cons. $N := \max\{\text{grado } f_i(x) : i = 1, \dots, k\}$

e nessun polinomio di grado $\geq N+1$ si può scrivere come combinazione lineare di $f_1(x), \dots, f_k(x)$

$\mathbb{R}[x]$ contiene molti sottosp. vett. che ammettono # finito di generatori:

$\mathbb{R}[x]_{\leq 5} = \{\text{polinomi di grado} \leq 5\}$

$\mathbb{R}[x]_{\leq 5} = \mathrm{Span}\{x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1\}$

$= \{c_1 \cdot x^5 + c_2 \cdot x^4 + c_3 \cdot x^3 + c_4 \cdot x^2 + c_5 \cdot x + c_6\}$

$\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \mathrm{Span}\{x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x, 1\}$
$\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

sono generatori per $\mathbb{R}^3$

- $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ LO SCELGO
- $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$ LO SCELGO
- $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \overset{?}{\notin} \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\right)$
  LO SCELGO
- $v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$