Applicazioni Lipschitziane

Def Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.
Un'applicazione $f: X \to Y$ è detta Lipschitziana se esiste una costante $K > 0$ t.c.

$$(*) \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K\, d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

OSS $f: X \to Y$ Lipschitz $\rightsquigarrow$

$$0 < L_f = \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{d_Y(f(x_1), f(x_2))}{d_X(x_1, x_2)} < +\infty \quad \underline{\text{costante di Lipschitz di } f}$$

è la più piccola costante tale per cui valga $(*)$

Teorema Sia $f: X \to Y$ Lipschitziana. Allora f è continua.

Dim $d_Y(f(\xi), f(x)) < \varepsilon$ se $d_X(\xi, x) < \dfrac{\varepsilon}{K}$.

Teorema Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ applicazione affine, cioè $\exists A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\exists b \in \mathbb{R}^m$ t.c. $f(x) = Ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Allora f è continua.

Dim Posto $A = (a_{ij})$, $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tA A)} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m (A^{(i)} x)^2 \leq \sum_{i=1}^m \|A^{(i)}\|^2 \|x\|^2 = \|A\|^2 \|x\|^2$$

Cauchy-Schwarz

Quindi $\|f(x) - f(y)\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\|\,\|x-y\|$

$\Rightarrow f$ Lipschitz.

Corollario Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ affinità

Allora f è un omeomorfismo. In particolare gli automorfismi lineari sono omeomorfismi.

OSS $\mathbb{R}^m$ ha molti omeomorfismi non affini, per esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ omeo.

Esempio Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ continua

$\rightsquigarrow$ $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$

$$F(x,y) = (x, y + f(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^k.$$

F è continua: Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+k}$, $\varepsilon > 0$

$$\| F(\xi,\eta) - F(x,y) \| = \| (\xi - x, \eta - y + f(\xi) - f(x)) \| \leq$$
$$\leq \| \xi - x \| + \| \eta - y \| + \| f(\xi) - f(x) \|$$

e segue la continuità di F da quella di f.

Si ha inoltre $F^{-1}(x,y) = (x, y - f(x))$

che è continua perché dello stesso tipo di F.

Abbiamo quindi un'applicazione iniettiva (non suriettiva)

$$\Phi : C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \to \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^{n+k})$$
$$\Phi(f) = F \quad (\text{come sopra})$$

che soddisfa: $\Phi(f+g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$

Operatore topologico

Def Sia X spazio topologico, e sia $A \subset X$.

Si chiama <u>chiusura di A in X</u> il sottoinsieme

$$Cl_X A \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{A \subset B \subset X \\ B \text{ chiuso}}} B \subset X$$

intersezione di tutti i chiusi di X che contengono A.
Altre notazioni: $Cl\, A = \bar{A}$.

Oss 1) $A \subset Cl_X A$ e $Cl_X A$ è chiuso in X
quindi $Cl_X A$ è il <u>più piccolo sottoinsieme chiuso che contiene A</u>.

2) $A = Cl_X A \iff A$ chiuso.

3) $Cl_X X = X$, $Cl_X \phi = \phi$.

Def I punti di $Cl_X A$ sono detti <u>punti di aderenza</u> di A.

Teorema Sia X spazio top. e $A \subset X$.
Le seguenti sono equivalenti:

i) $x \in Cl_X A$

ii) $\exists\, \mathfrak{I}_x$ base di intorni di $x \in X$ t.c. $J \cap A \neq \phi$ $\forall J \in \mathfrak{I}_x$;

iii) $U \cap A \neq \phi$ $\forall U \subset X$ intorno aperto di $x \in X$.

Dim $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Sia $J_x \in \mathfrak{I}_x$ e $U \subset X$ aperto
t.c. $x \in U \subset J_x$. Ragioniamo per assurdo:

$U \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subset X - U$ e $X - U$ chiuso

$\Rightarrow Cl_X A \subset X - U \Rightarrow x \notin Cl_X A$ contraddizione.

$\boxed{ii) \Rightarrow iii)}$ $U \subset X$ intorno aperto di $x \in X \Rightarrow \exists\, J \in \mathcal{J}_x$ t.c. $J \subset U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$.

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ Per assurdo, se $x \notin Cl_X A \Rightarrow$

$X - Cl_X A$ intorno aperto di x e $(X - Cl_X A) \cap A = \emptyset$

contraddizione.

Def Sia X spazio topologico e $A \subset X$. Chiamiamo <u>interno di A in X</u> il sottoinsieme

$$Int_X A = Int A = \mathring{A} \overset{def}{=} \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ aperto}}} U \subset X$$

unione di tutti gli aperti di X contenuti in A.

Def I punti di $Int_X A$ sono detti punti interni di A.

OSS 1) $Int_X A \subset A$ è il <u>più grande aperto di X contenuto in A</u>.

2) $x \in Int_X A \Leftrightarrow \exists\, U \subset X$ aperto t.c. $x \in U \subset A$.

3) $Int_X X = X$, $Int_X \emptyset = \emptyset$.

Esempi 1) $[0,1[\subset \mathbb{R} \rightsquigarrow Cl_{\mathbb{R}} [0,1[= [0,1]$

$Int_{\mathbb{R}} [0,1[=]0,1[$

2) $Cl_{\mathbb{R}} (\{0\} \cup]1,2[) = \{0\} \cup [1,2]$

$Int_{\mathbb{R}} (\{0\} \cup]1,2[) =]1,2[$.

Def Sia X sp. top. e $A \subset X$. La frontiera (o bordo) di A in X è il sottoinsieme

$$Fr_X A = Cl_X A \cap Cl_X (X - A) \subset X$$

Altre notazioni $Fr A = Bd A = \partial A$

Def I punti di $Fr_X A$ sono detti punti di frontiera di A.

Oss 1) $Fr_X A$ è chiuso in X

2) $Fr_X X = Fr_X \phi = \phi$

Teorema Sia X spazio top. e $A \subset X$. Allora $x \in Fr_X A \iff \forall J$ intorno (basico) di $x \in X$, si ha $J \cap A \neq \phi$ e $J \cap (X - A) \neq \phi$.

Dim Segue subito dal teorema sulla chiusura.

Teorema

1) $Fr_X A = Cl_X A - Int_X A$

2) $Cl_X A = Int_X A \cup Fr_X A$

3) $Int_X A \cap Fr_X A = \phi$.

Dim 1) $x \in Cl_X A - Int_X A \iff \forall J \subset X$ intorno di x, si ha $J \cap A \neq \phi$ e $J \cap (X - A) \neq \phi$

$J \not\subset A$

$\iff x \in Fr_X A$.

2) e 3) seguono subito da 1).

Def Sia X spazio top. e $A \subset X$. Chiamiamo <u>esterno</u> di A in X il sottoinsieme

$$\mathrm{Ext}_X A \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Int}(X-A) \quad (\underline{\text{punti esterni}} \text{ di } A)$$

OSS 1) $\mathrm{Ext}_X A$ è il più grande aperto di X che non interseca A.

2) $x \in \mathrm{Ext}_X A \iff \exists\, J$ intorno di x in X t.c. $J \subset X - A$.

3) $X = \mathrm{Cl}_X A \cup \mathrm{Cl}_X (X-A) = \mathrm{Int}_X A \cup \mathrm{Fr}_X A \cup \mathrm{Ext}_X A$.